



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa



N. H. Abel

1802—1829.

ACTA MATHEMATICA 1.

Math
A



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

1

167962.
13/12/21

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.
1882.

IMPRIMERIE CENTRALE.


BERLIN

MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

QA
1
A2575
v. 1



REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
H. TH. DAUG, Upsala.
H. GYLDÉN, Stockholm.
HJ. HOLMGREN, »
C. J. MALMSTEN, Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER, Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
O. J. BROCH, »
S. LIE, »
L. SYLOW, Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ, Kjöbenhavn.
J. PETERSEN, »
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

HANS MAJESTÄT

KONUNG OSCAR II,

genom hvilken
högsinnade beskydd och kraftiga understöd
utgifvandet af denna tidskrift blifvit möjliggjordt,
hembäres underdånigast Redaktionens
vördnadsfulla tacksamhet.

C'est à la munificence de Sa Majesté le roi OSCAR II que nous devons d'avoir pu fonder le journal dont nous offrons la première livraison aux amis des mathématiques. *L'Association en mémoire de Lars Hierta*, la *Fondation de Letterstedt* ainsi que les personnes dont les noms suivent ici — C. J. Malmsten, Ch. Hermite, Fr. P:son Beijer, F. Kempe, H. R. Astrup, C. Ekman, N. G. Sörensen, O. Wijk, Fr. Piper, O. Dickson, B. Kempe, W. Kempe, S. Axell, L. E. Rubenson, C. O. Rubenson — ont également contribué aux frais de l'oeuvre dont l'auguste souverain a daigné se constituer le protecteur.

L'époque à laquelle nous commençons notre publication est certainement l'une des plus fécondes dans l'histoire des mathématiques, par le grand nombre et l'importance des découvertes qui touchent aux principes les plus essentiels de l'analyse. On sait combien, en divers pays, ce mouvement a été puissamment secondé par des journaux mathématiques, qui contiennent les oeuvres

Der Grossmuth Seiner Majestät des Königs OSCAR II verdanken wir es diese Zeitschrift gründen zu können, deren erste Lieferung wir hiermit den Freunden der Mathematik übergeben. Die Stiftung *Lars Hierta's Andenken* und der *Letterstedt'sche Verein* sowie verschiedene Personen, deren Namen in dankbarer Anerkennung hier genannt werden — C. J. Malmsten, Ch. Hermite, Fr. P:son Beijer, F. Kempe, H. R. Astrup, C. Ekman, N. G. Sörensen, O. Wijk, Fr. Piper, O. Dickson, B. Kempe, W. Kempe, S. Axell, L. E. Rubenson, C. O. Rubenson — haben gleichfalls zur Deckung der Kosten des Unternehmens beigetragen, welches der erhabene Fürst unter seinen besonderen Schutz zu nehmen geruht hat.

Der Zeitpunkt, zu welchem wir die Herausgabe beginnen, ist gewiss einer der fruchtbarsten in der Geschichte der Mathematik, wegen der grossen Anzahl und Wichtigkeit der Entdeckungen auf dem Gebiete der Analysis. Dieses rege Leben ist durch die in verschiedenen

des plus grands géomètres de notre temps. Nous nous sommes proposé le même but, de servir la science, en réunissant et associant les recherches nouvelles qui concourent à son progrès, par la nouveauté des résultats ou l'originalité des méthodes.

Des mathématiciens éminents dans tous les pays, en nous assurant de leur collaboration, nous ont donné un témoignage de sympathie qui nous pénètre de reconnaissance, et que nous voulons justifier par les soins et le zèle que nous apporterons à notre publication.

Le journal paraîtra à époques variables en livraisons dont quatre formeront un volume d'environ cinquante feuilles.

Qu'il nous soit permis d'espérer qu'une entreprise inspirée par le seul amour de la science, recevra de tous les géomètres auxquels elle s'adresse un favorable et bienveillant accueil!

La rédaction.

Ländern herausgegebenen mathematischen Zeitschriften, welche die Arbeiten der ersten Mathematiker unserer Zeit enthalten, wesentlich gefördert worden. Unser Zweck ist nun in derselben Richtung mitzuarbeiten, indem wir Abhandlungen sammeln und veröffentlichen, welche durch das Bemerkenswerthe ihrer Resultate oder die Originalität der Methoden zur Förderung der Wissenschaft beitragen.

Hervorragende Mathematiker aller Länder haben, indem sie ihre Mitwirkung zusagten, uns einen Beweis ihrer Theilnahme gegeben, der uns zu grösstem Danke verpflichtet, und welchem wir durch den Eifer und die Sorgfalt zu entsprechen hoffen, die wir unseren Veröffentlichungen widmen werden.

Die Zeitschrift erscheint in zwanglosen Heften, deren je vier einen Band von ungefähr fünfzig Bogen bilden werden.

Möchte dem Unternehmen, was nur aus reiner Liebe zur Wissenschaft entstanden ist, bei den Mathematikern eine günstige und wohlwollende Aufnahme zu Theil werden!

Die Redaction.

THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS

PAR H. POINCARÉ

à PARIS.

Dans une série de mémoires présentés à l'Académie des Sciences j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendentes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une note insérée aux *Mathematische Annalen*. Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsiens, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

§ 1. Substitutions réelles.

Soit z une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; t une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation:

$$(1) \quad t = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'on a:

$$ad - bc = 1.$$

Si le point z décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle α , le point t décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant

sous le même angle α , c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)^{(1)}$ conserve les angles.

La fonction $\frac{az+b}{cz+d}$ est en effet monogène.

Si z décrit un cercle, t décrit également un cercle; c'est à dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ change les cercles en cercles.

Enfin si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre valeurs de z et si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs correspondantes de t , on a:

$$(2) \quad \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3} \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

Il existe en général deux valeurs de z qui sont égales aux valeurs correspondantes de t ; c'est ce qu'on appelle les points doubles de la substitution (1).

Si
$$(a+d)^2 \geq 4$$

les points doubles sont distincts; et si nous les appelons α et β la relation (1) peut s'écrire:

$$(3) \quad \frac{t - \alpha}{t - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

K étant une constante que j'appellerai *multiplicateur*.

Si au contraire

(¹) J'emploierai dans ce qui suit les notations de M. Jordan.

La substitution $[z, f(z)]$ ou bien $[x, y; f(x, y), \varphi(x, y)]$ sera l'opération qui consiste à changer z en $f(z)$ ou bien celle qui consiste à changer x en $f(x, y)$ et y en $\varphi(x, y)$. La substitution inverse de $[z, f(z)]$ sera $[f(z), z]$; le produit de deux substitutions sera l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions.

Un système de substitutions formera un *groupe* si la substitution inverse de toute substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système font également partie du système.

Un groupe A est *isomorphe* à un autre groupe B si à toute substitution de B correspond une et une seule substitution de A et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de B , corresponde le produit des deux substitutions correspondantes de A .

Si B est également isomorphe à A , les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

$$(a + d)^2 = 4$$

les points doubles se confondent et l'on a :

$$a = \gamma^2.$$

La relation (1) peut alors s'écrire :

$$(4) \quad \frac{1}{t - a} = \frac{1}{z - a} + c$$

Telles sont les principales propriétés des substitutions linéaires $\begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix}$. Mais nous allons faire une hypothèse de plus; nous supposerons que les coefficients a, b, c, d sont réels. Je dirai alors que la substitution (1) est une *substitution réelle*.

Il en résulte que la partie imaginaire de t est positive, nulle ou négative selon que la partie imaginaire de z est elle-même positive, nulle ou négative; c'est à dire que la substitution (1) conserve l'axe des parties réelles que j'appellerai désormais X et change également en elle-même la partie du plan qui est au dessus de cet axe.

Si z décrit un cercle ayant son centre sur X , t décrira également un cercle ayant son centre sur X . Si z_1 et z_2 sont deux quantités imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes t_1 et t_2 de t seront aussi imaginaires conjuguées.

Si α et β sont deux valeurs de z , γ et δ les valeurs correspondantes de t ; si $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont les valeurs conjuguées de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; on aura en vertu de la relation (2)

$$\frac{\alpha - \alpha' \beta - \beta'}{\alpha - \beta' \beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma' \delta - \delta'}{\gamma - \delta' \delta - \gamma'}.$$

Si l'on pose pour abréger :

$$\frac{\alpha - \alpha' \beta - \beta'}{\alpha - \beta' \beta - \alpha'} = (\alpha, \beta)$$

cette relation s'écrira :

$$(5) \quad (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M^r Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 < 4.$$

Les points doubles α et β sont imaginaires conjugués; l'un d'eux est par conséquent au dessus de X , l'autre au dessous; la relation (1) peut se mettre sous la forme (3) et la constante K est une quantité imaginaire dont le module est l'unité. Si z décrit un cercle passant par α et β , t décrira également un cercle passant par α et β et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de K .

La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui ayant son centre sur le prolongement de $\alpha\beta$ coupe ce segment harmoniquement.

Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 = 4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur X . La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que α soit réel. Si z décrit un cercle passant par α , t décrira également un cercle passant par α et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui sont tangentes à X en α . Soit C une pareille circonférence; soit m_0 un point de cette circonférence C , la substitution (1) le changera en un autre point m_1 de cette même circonférence; elle changera m_1 en un autre point m_2 de C , m_2 en un autre point m_3 , etc. Quand z tendra vers l'infini le point m_z se rapprochera indéfiniment de α . Soit de même m_{-1} le point que la substitution (1) change en m_0 , m_{-2} le point que cette substitution change en m_{-1} , etc. Quand z tendra vers l'infini, le point m_{-z} se rapprochera aussi indéfiniment de α .

J'appelle C_z le cercle qui a son centre sur X et qui passe par α et par m_z ; qui par conséquent coupe orthogonalement le cercle C en α et en m_z . Il est clair que la substitution (1) changera C_{-1} en C_0 , C_0 en C_1 , C_1 en C_2 , etc. et en général C_z en C_{z+1} . De plus si z est infini positif ou négatif, C_z se réduit à un cercle de rayon infiniment petit. C'est dire que si l'on applique une infinité de fois la substitution (1), ou la

substitution inverse à un cercle passant par α et ayant son centre sur X , le rayon de ce cercle devient infiniment petit.

Il en résulte qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X ne pourra rencontrer un nombre infini de cercles C_z , c'est à dire de transformés successifs d'un cercle C_0 ayant son centre sur X et passant par α .

Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles:

$$(a + d)^2 > 4.$$

Les points doubles α et β sont distincts et situés sur X . La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que K soit réel et positif. Je puis de plus toujours supposer:

$$K > 1.$$

Si z décrit un cercle passant par α ou par β , t décrira également un cercle passant par α ou par β et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui passent par α et β .

J'appelle comme plus haut C une circonférence passant par α et β , et

$$\dots\dots\dots m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots\dots\dots$$

une série de points tels que la substitution (1) change m_z en m_{z+1} . Il est clair que le point m_z se rapprochera indéfiniment de β quand z tendra vers $+\infty$ et de α quand z tendra vers $-\infty$.

J'appelle aussi C_z le cercle qui ayant son centre sur X passe par α et par m_z . Lorsque z tendra vers $+\infty$, C_z se rapprochera indéfiniment du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre; lorsque z tendra vers $-\infty$, le rayon de C_z diminuera indéfiniment. C'est dire que si l'on applique la substitution (1) une infinité de fois à un cercle C_0 passant par α et ayant son centre sur X , on obtiendra à la limite un cercle ayant $\alpha\beta$ pour diamètre. Si on applique une infinité de fois à C_0 la substitution inverse, le rayon limite sera nul.

Si au contraire on appliquait une infinité de fois la substitution (1) à un cercle passant par β et ayant son centre sur X , le rayon limite serait nul, tandis qu'en lui appliquant une infinité de fois la substitution inverse, on obtiendrait à la limite le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Il résulte de là qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X , rencontrera un nombre infini de cercles C_z , c'est à dire de transformés successifs du cercle C_0 , ou bien un nombre fini de ces transformés, selon qu'il rencontrera ou ne rencontrera pas le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Si l'on a:

$$(a, \beta) = (\gamma, \delta)$$

il existe une substitution réelle qui change α en γ et β en δ . Cette substitution est définie par la relation:

$$\frac{t - \gamma}{t - \delta} \frac{\gamma' - \delta}{\gamma' - \gamma} = \frac{z - a}{z - \beta} \frac{a' - \beta}{a' - a}$$

Il est une autre propriété des substitutions réelles sur laquelle je voudrais attirer l'attention; en différentiant la relation (1) on trouve:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

Si de plus j'appelle y la partie imaginaire de z , Y celle de t , je trouve:

$$\text{mod } \frac{dt}{dz} = \frac{Y}{y}.$$

§ 2. Figures congruentes.

Je dirai que deux figures sont *congruentes* quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution *réelle*. Les substitutions réelles formant un groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles.

Je puis énoncer tout d'abord les théorèmes suivants:

Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Si dans deux figures congruentes, le point γ est homologue de α et le point δ homologue de β , on a:

$$(1) \quad (a, \beta) = (\gamma, \delta).$$

Cette relation peut prendre une autre forme.

Considérons en effet les quantités α, β et leurs conjuguées α', β' de telle sorte que:

$$(a, \beta) = \frac{a - a' \beta - \beta'}{a - \beta' \beta - a'}.$$

Les quatre points $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont sur un même cercle qui a son centre sur X . Supposons de plus que α et β soient tous deux au-dessus de x . Ce cercle coupe X en deux points que j'appelle h et k ; h sera celui de ces deux points qui est sur l'arc $\beta\beta'$, k celui de ces deux points qui est sur l'arc $\alpha\alpha'$. Je pose

$$[\alpha, \beta] = \frac{a - h \beta - k}{a - k \beta - h}.$$

$[\alpha, \beta]$ est essentiellement réel, positif et plus grand que 1. De plus on a :

$$(a, \beta) = \frac{4 [\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta] + 1)^2}.$$

Si γ est un point de l'arc de cercle $\alpha \beta$, on a :

$$[\alpha, \gamma] [\gamma, \beta] = [\alpha, \beta].$$

Il est clair maintenant qu'en employant cette notation nouvelle, on peut mettre la relation (1) sous la forme :

$$[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Voyons ce qui se passera quand α et β seront infiniment voisins.

Soit :

$$\begin{aligned} z &= x + y \sqrt{-1} \\ dz &= dx + dy \sqrt{-1} \\ \text{mod } dz &= \sqrt{dx^2 + dy^2}. \end{aligned}$$

On aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{\text{mod } dz}{y}$$

ou :

$$L [z, z + dz] = \frac{\text{mod } dz}{y}.$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z + dz]$ est proportionnel au module de dz et indépendant de son argument.

L'intégrale

$$\int \frac{\text{mod } dz}{y}$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque s'appellera la L de cette courbe.

L'intégrale double:

$$\iint \frac{dx dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelconque sera la S de cette aire.

D'après ce qui précède deux arcs de courbe congruents ont même L ; deux aires congruentes ont même S . La L d'un arc de cercle $\alpha\beta$ ayant son centre sur X sera le logarithme népérien de $[\alpha, \beta]$.

Je ne puis passer sous silence le lien qui rattache les notions précédentes à la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots *droite*, *longueur*, *distance*, *surface* leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur X , longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L , distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S .

Supposons de plus qu'on conserve aux mots *angle* et *cercle* leur signification, mais en convenant d'appeler centre d'un cercle le point qui est à une distance constante de tous les points du cercle (d'après le sens nouveau du mot distance) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces dénominations, *les théorèmes de Lobatchewski sont vrais*, c'est à dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.

§ 3. Groupes Discontinus.

Envisageons une infinité de substitutions de la forme:

$$(1) \quad \left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right)$$

qui, en posant pour abrégé:

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$$

peuvent s'écrire sous la forme:

$$[z, f_i(z)].$$

Pour abréger encore, je dirai simplement la substitution

$$f_i(z).$$

Je suppose que i est un indice qui varie de 0 à l'infini.

Je suppose de plus:

$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0$$

d'où

$$f_0(z) = z.$$

Je suppose enfin que ces substitutions forment un groupe.

Je vais définir certains symboles dont je serai amené à faire usage dans la suite. Je poserai:

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)], \quad f_i^3(z) = f_i[f_i^2(z)], \quad \dots \dots f_i^m(z) = f_i[f_i^{m-1}(z)] \dots \dots$$

Je définirai de même, par une extension toute naturelle, le symbole $f_i^m(z)$ quand m sera nul ou négatif. Je poserai:

$$f_i^0(z) = z, \quad z = f_i^{-1}[f_i(z)], \quad f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Si $f_1(z)$ est une des substitutions du groupe envisagé, toutes les substitutions qui sont comprises dans la formule générale:

$$(2) \quad f_1^m(z)$$

feront également partie du groupe.

Si $f_2(z)$ est une substitution du groupe non comprise dans la formule (2), toutes les substitutions de la forme:

$$(3) \quad f_1^\alpha(f_2^\beta(f_1^\gamma(f_2^\delta(\dots(f_1^\lambda(f_2^\mu(z))\dots))))$$

appartiendront au groupe.

Si maintenant $f_3(z)$ est une substitution du groupe qui ne soit pas comprise dans la formule (3), c'est à dire qui ne soit pas une combinaison de f_1 et de f_2 , si f_4 est une substitution du groupe qui ne soit pas une combinaison de f_1 , f_2 et f_3 , etc. \dots si enfin f_p est une substitution qui ne soit pas une combinaison de f_1 , f_2 , \dots , f_{p-1} , les substitutions comprises dans la formule générale:

$$(4) \quad f_{\alpha_1}^{\beta_1} (f_{\alpha_2}^{\beta_2} (\dots \dots \dots (f_{\alpha_n}^{\beta_n} (z)) \dots \dots \dots))$$

(où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des indices qui peuvent être 1, 2, 3, \dots , $p-1$ ou p , et où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sont des entiers positifs ou négatifs; feront également partie du groupe.

Il peut se faire que l'on ait épuisé ainsi toutes les substitutions du groupe envisagé, de telle sorte que toute substitution de ce groupe soit une combinaison de f_1, f_2, \dots, f_p . On dit alors que le groupe est *dérivé* de f_1, f_2, \dots, f_p , ou que f_1, f_2, \dots, f_p sont un système de *substitutions fondamentales* du groupe. Il est évident qu'un groupe peut avoir une infinité de systèmes de substitutions fondamentales; mais *un seul de ces systèmes suffit pour déterminer complètement le groupe*.

On peut concevoir aussi des groupes tels qu'il soit impossible de les faire dériver d'un nombre fini de substitutions fondamentales. Mais nous les laisserons systématiquement de côté.

Soit donc un groupe G dérivé de p substitutions fondamentales f_1, f_2, \dots, f_p de telle sorte que toutes ses substitutions soient de la forme (4).

J'appellerai *exposant* d'une substitution de ce groupe la somme des modules des nombres entiers positifs ou négatifs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Il peut se faire que les diverses substitutions contenues dans la formule (4) ne soient pas toutes distinctes et que l'on ait identiquement:

$$(5) \quad f_{\alpha_1}^{\beta_1} (f_{\alpha_2}^{\beta_2} (\dots \dots \dots f_{\alpha_n}^{\beta_n} (z)) \dots) = f_{\gamma_1}^{\delta_1} (f_{\gamma_2}^{\delta_2} (\dots f_{\gamma_n}^{\delta_n} (z) \dots \dots \dots)).$$

La relation (5) peut toujours se mettre sous la forme:

$$(6) \quad f_{\alpha_1}^{\beta_1} (f_{\alpha_2}^{\beta_2} (\dots \dots \dots f_{\alpha_n}^{\beta_n} (z) \dots \dots \dots)) = z.$$

Les α et les β ont ici la même signification que dans la formule (4).

Les relations de la forme (6) pourront en général être toutes regardées comme les conséquences d'un certain nombre d'entre elles que nous appellerons *relations fondamentales* et qui seront seules réellement distinctes.

Un groupe H sera isomorphe à G s'il est dérivé d'un même nombre de substitutions fondamentales, et si l'on a entre ses substitutions fondamentales les mêmes relations fondamentales. Si entre les substitutions de H il n'y a pas d'autre relation de la forme (6) qu'entre celles de G , l'isomorphisme est réciproque et par conséquent *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

Par suite des relations (6), une même substitution peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (4); de sorte que la définition donnée plus haut de *l'exposant d'une substitution* laisse subsister une certaine ambiguïté. Nous appellerons alors exposant d'une substitution *la plus petite* valeur que peut prendre la somme des modules de $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ quand on écrit cette substitution sous la forme (4).

Ici il y a lieu de faire une distinction importante entre les différentes sortes de groupes formés de substitutions réelles. Nous devons d'abord laisser de côté les groupes qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions et qui ont déjà été étudiés à fond par plusieurs géomètres. Mais si les substitutions d'un groupe sont en nombre infini, on peut faire deux hypothèses différentes:

On peut supposer qu'il est possible de choisir dans le groupe une substitution

$$(z, f_i(z))$$

telle que $f_i(z)$ diffère infiniment peu de z ; (et cela quel que soit z) c'est à dire que le groupe contient une substitution infinitésimale.

On peut supposer aussi que le groupe ne contient pas de pareille substitution.

Les groupes de la première espèce seront *continus*, ceux de la seconde *discontinus*.

Il ne peut exister de fonction uniforme analytique de z qui reste inaltérée par les substitutions d'un groupe continu, car cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment voisins les uns des autres et, par conséquent, avoir une valeur constante. Aussi les groupes continus n'ont-ils aucun intérêt pour nous et réserverons-nous le nom de *groupes fuchsien*s aux groupes discontinus formés de substitutions réelles.

Si le groupe G est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan ou une partie du plan en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes:

Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe G . Celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_i(z))$$

s'appellera la région R_i et par conséquent celle qui correspondra à la substitution:

$$(z, f_0(z)) \text{ ou } (z, z)$$

s'appellera R_0 .

Quand z sera intérieur à la région R_0 , $f_i(z)$ devra être intérieur à R_i . En d'autres termes, R_i sera la transformée de R_0 par la substitution:

$$(z, f_i(z)).$$

Supposons maintenant que z soit intérieur à la région R_K correspondant à:

$$(z, f_K(z)).$$

$f_K^{-1}(z)$ devra être intérieur à R_0 et par conséquent $f_i(f_K^{-1}(z))$ sera intérieur à R_i .

Dire que R_i est transformée de R_0 par une substitution réelle, c'est dire que ces régions sont congruentes et par conséquent que toutes les régions R sont congruentes entre elles.

Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est *régulière* lorsqu'en déformant ces régions d'une manière continue on pourra faire coïncider le nouveau mode de division avec l'ancien de telle façon que chaque région de la nouvelle division vienne coïncider avec une région de l'ancienne, et qu'une région donnée quelconque du nouveau mode de division vienne coïncider avec une région *donnée également quelconque* de l'ancien mode. En ce qui concerne le mode de division qui nous occupe, il est clair que si l'on applique aux différentes régions R la substitution

$$[z, f_i(z)]$$

chacune des régions R se changera en une autre région R et R_0 se changera en R_i . C'est dire que la division du plan sera régulière.

Le problème de la recherche des groupes fuchsien se ramène donc au suivant: *Subdiviser d'une façon régulière le plan ou une partie du plan en une infinité de régions toutes congruentes entre elles.*

Deux régions seront dites limitrophes lorsqu'elles confineront entre elles tout le long d'un arc de courbe qui leur servira de frontière commune.

Soit R_p une région limitrophe de R_0 tout le long d'un arc AB de son périmètre; cet arc AB sera l'un des côtés de R_0 . Mais on peut sup-

poser que ce ne soit pas le plan tout entier, mais une partie du plan qui ait été divisée en une infinité de régions R , toutes congruentes entre elles. Dans ce cas, R_0 pourra confiner tout le long d'un arc CD de son périmètre à la partie du plan qui n'aura pas été subdivisée en régions R . Cet arc CD sera encore *un des côtés de R_0* . Les côtés tels que AB seront ceux de la 1^{ère} sorte, les côtés tels que CD ceux de la 2^{me} sorte.

Je supposerai toujours que les côtés de la 2^{me} sorte sont des segments de l'axe X .

Je justifie en quelques mots cette hypothèse. Si l'on a divisé une partie du plan en une infinité de régions R , et si la région R_0 est contiguë à la partie du plan non divisée, on pourra toujours étendre la division à une portion plus grande du plan. Je l'étendrai jusqu' à ce que R_0 cesse d'être contiguë à la partie non divisée, ou jusqu' à ce que R_0 atteigne l'axe X . Cet aperçu suffira, je pense, pour faire comprendre les raisons qui me permettent d'adopter cette hypothèse.

J'appellerai sommets de R_0 les extrémités de ses côtés et je serai conduit à envisager: 1° les sommets situés au dessus de X ; 2° les sommets situés sur X et séparant deux côtés de la 1^{ère} sorte; 3° les sommets situés sur X et séparant un côté de la 1^{ère} sorte et un de la 2^{me} sorte. J'appellerai ces différents sommets, sommets de la 1^{ère}, de la 2^{de} ou de la 3^{me} catégorie.

Les points

$$z, f_1(z), f_2(z) \dots f_i(z) \dots$$

seront dits *correspondants*.

Quand le point z est à l'intérieur de R_0 , tous les points $f_i(z)$ seront dans des régions R_i différentes de R_0 . Donc il ne peut y avoir dans l'intérieur de R_0 deux points correspondants, et un point intérieur à R_0 ne peut être non plus correspondant d'un point du périmètre de cette région.

Au contraire un point situé sur l'un des côtés de R_0 , sur λ_p par exemple, appartient à la fois à deux régions R_0 et R_p . Si le point z est sur λ_p , c'est à dire sur le périmètre de R_p , le point $f_p^{-1}(z)$ sera sur le périmètre de R_0 sur un côté que j'appellerai λ'_p et qui séparera R_0 d'une région R'_p correspondant à la substitution:

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Les côtés λ_p et λ'_p seront dits conjugués.

On peut tirer de là les conclusions suivantes: 1° Les côtés de la 1^{ère} sorte sont en nombre pair et conjugués deux à deux. 2° Deux côtés conjugués sont congruents. 3° Les points du périmètre de R_0 (sans parler des sommets dont nous nous occuperons plus loin) sont correspondants deux à deux.

Une convention spéciale est nécessaire pour faire rentrer dans le cas général un cas particulier qui se présentera quelquefois.

Il pourrait arriver que l'on eût identiquement:

$$f_p(z) = f_p^{-1}(z) \text{ ou } z = f_p[f_p(z)].$$

Alors R_p coïnciderait avec R'_p , λ_p avec λ'_p . Mais dans ce cas, la substitution

$$(z, f_p(z))$$

est elliptique et la relation (1) § 1 pourrait se mettre sous la forme (3) § 1 de telle façon que:

$$K = -1.$$

La substitution $(z, f_p(z))$ n'altérant pas le côté λ_p , celui-ci devra passer par le point α (point double de la substitution) et se partager en deux moitiés congruentes entre elles.

Cela posé on pourra regarder le point α comme un sommet et les deux moitiés du côté λ_p comme deux côtés distincts, conjugués entre eux; l'on est ainsi ramené au cas général.

Chaque sommet appartient à trois ou plusieurs régions différentes; il en résulte que plusieurs sommets de R_0 peuvent être correspondants. Je dirai que les sommets correspondants appartiennent à un même cycle.

D'après ce qui précède le nombre des côtés de la 1^{ère} sorte est pair; soit $2n$ ce nombre. Ces $2n$ côtés seront conjugués deux à deux. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n de ces côtés; $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n}$ les n autres côtés conjugués des premiers, de telle sorte que les côtés λ_p, λ_{n+p} soient conjugués. Soit R_p la région qui est limitrophe de R_0 le long du côté λ_p , et

$$(z, f_p(z))$$

la substitution correspondante. De cette façon, on aura:

$$f_{n+p}(z) = f_p^{-1}(z).$$

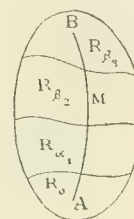
Il est aisé de voir que si l'on sort d'une région R_i correspondant à:

$$(z, f_i(z))$$

par le côté λ_p , on entre dans une région correspondant à la substitution

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver quelle est la substitution qui correspond à une région donnée R_{β_ν} . Soit A un point intérieur à R_0 , B un point intérieur à R_{β_ν} ; joignons ces deux points par un arc quelconque AMB . Si je suppose que cet arc AMB parte de la région R_0 , qu'il en sorte par le côté λ_{α_1} pour entrer dans la région R_{α_1} , puis qu'il sorte de R_{α_1} par le côté correspondant à λ_{α_2} pour entrer dans la région R_{β_2} , qu'il sorte de R_{β_2} par le côté correspondant à λ_{α_3} pour entrer dans R_{β_3} , etc. et enfin qu'il sorte de $R_{\beta_{\nu-1}}$ par le côté correspondant à λ_{α_ν} pour entrer dans R_{β_ν} ; la substitution qui correspondra à cette région R_{β_ν} sera:



$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}(\dots(f_{\alpha_{\nu-1}}(f_{\alpha_\nu}(z)\dots)))).]$$

Dans cette expression $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ désignent des indices qui peuvent être 1, 2, \dots ou $2n$.

Donc toute substitution qui correspond à une région que l'on peut atteindre en partant de R_0 et en franchissant un nombre fini de côtés est une combinaison de $(z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n)$. Nous laisserons de côté tous les groupes pour lesquels on ne pourrait pas passer d'une région à l'autre en franchissant un nombre fini de côtés. Alors toute substitution sera une combinaison de:

$$(7) \quad (z, f_1), (z, f_2), \dots, (z, f_n).$$

Comment trouverons-nous les relations de la forme (6) qui auront lieu entre les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n ?

Pour cela il suffira évidemment de rechercher comment on peut exprimer par une combinaison des substitutions (7) la substitution:

$$(z, z) \text{ ou } (z, f_0(z))$$

qui correspond à R_0 . On appliquera la règle exposée plus haut; c'est à

dire qu'on décrira un contour fermé quelconque AMA passant par un point A intérieur à R_0 . Si ce contour traverse successivement des régions $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\beta_2}, \dots, R_{\beta_{\nu-1}}, R_{\beta_\nu} = R_0$ et en sort respectivement par les côtés $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_\nu}$, la substitution qui correspondra à R_0 sera:

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_\nu}(z)\dots)))]$$

ce qui permettra d'écrire

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\dots(f_{\alpha_\nu}(z)\dots)).$$

De toutes les relations (6) ainsi obtenues, toutes ne sont pas fondamentales. Pour obtenir les relations fondamentales, il suffit de décrire des contours fermés infinitésimaux autour de chacun des sommets de R_0 .

Puisqu'on trouve ainsi toutes les relations de la forme (6), les substitutions (7) sont généralement indépendantes et par conséquent forment un système de substitutions fondamentales du groupe envisagé.

On voit de plus que l'exposant d'une substitution f_i est le nombre minimum de côtés qu'il faut franchir pour passer de R_0 dans la région qui correspond à la substitution f_i .

Outre les groupes fuchsien ou groupes discontinus formés de substitutions réelles, j'ai été conduit à envisager les groupes discontinus formés de substitutions linéaires quelconques et que j'ai appelés groupes Kleinéens. Je n'en parlerai pas dans le présent travail, me réservant d'exposer dans un mémoire spécial les résultats que j'ai obtenus à leur égard.

§ 4. Polygones générateurs.

Les régions R_i sont définies par la condition que chacune d'elles ne contient *qu'un seul* point correspondant à un point z donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir complètement. En effet si l'on se donne un groupe fuchsien G , il y aura une infinité de manières de subdiviser le plan de telle sorte que dans chaque région il n'y ait qu'un point correspondant à un point z donné.

Au contraire si l'on se donne la décomposition du plan en une infinité de régions telles que R , le groupe G sera parfaitement déterminé.

Donnons-nous un groupe G et envisageons les diverses décompositions du plan en régions R_0 qui correspondent à ce groupe. Ces décompositions

sont en nombre infini. Comment de l'une d'elles pourrions-nous déduire toutes les autres? Soit S_0 une portion de la région R_0 , S_i la portion correspondante de la région R_i . Choisissons parmi les substitutions du groupe G l'une quelconque d'entre elles:

$$(z, f_p(z)).$$

Soit i_p l'indice de la substitution:

$$[z, f_p(f_i(z))$$

de telle sorte que:

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

Des diverses régions R_i je retranche la portion S_i et j'ajoute à ce qui reste la région S_{i_p} . J'obtiens ainsi une infinité de régions:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Ces régions R'_i recouvriront la même partie du plan que les régions R_i et ne la recouvriront qu'une fois. Chacune d'elles ne contiendra qu'un seul point correspondant à un point donné z . A la décomposition du plan en régions R'_i correspondra donc le même groupe G qu'à la décomposition en régions R_i . Si S_0 est contigu intérieurement à l'une des frontières de R_0 et si S_p est contigu extérieurement à l'une des frontières de $R_0 - S_0$, la région R'_0 sera *d'une seule pièce et sans trou*. La plupart du temps, pour plus de commodité, nous choisirons la région R'_0 de telle sorte qu'elle soit d'une seule pièce et sans trou, mais cela n'a rien d'essentiel.

En opérant sur les régions R'_i comme nous avons opéré sur les régions R_i , nous obtiendrons une nouvelle décomposition du plan en régions R''_i qui correspondra toujours au groupe envisagé G . En continuant indéfiniment de la sorte, on obtiendra toutes les décompositions qui correspondent au groupe G .

On est conduit tout naturellement à la généralisation suivante:

Jusqu'ici j'ai supposé que la région S_0 était tout entière intérieure à la région R_0 et par conséquent S_i à la région R_i , et de fait, sans cette hypothèse, on ne saurait ce qu'on doit entendre par la région:

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i$$

à moins toutefois que l'on ne fasse une convention spéciale.

On est conduit ainsi à envisager des régions divisées en deux parties dont l'une est considérée comme positive et l'autre comme négative.

Ainsi si S_i ne fait pas partie de R_i , on considérera la région R'_i comme formée d'une partie positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une partie négative S_i . Cet ordre de considérations n'est pas d'ailleurs absolument nouveau.

Si l'on envisage un quadrilatère $ABCD$ dont deux côtés opposés AB et CD se coupent en un point M , ce quadrilatère, formé de deux triangles ADM et BCM opposés par le sommet, s'appelle un quadrilatère concave.

Les formules qui donnent l'aire d'un quadrilatère convexe s'appliquent à une pareille figure pourvu que l'on regarde l'aire de cette figure comme la différence et non comme la somme des aires des deux triangles ADM et BCM . Dans un quadrilatère concave l'un des deux triangles doit donc être regardé comme positif et l'autre comme négatif. Il se passe ici quelque chose d'analogue. Une région *concave* R'_i sera formée d'une portion positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une portion négative S_i . Le nombre des points correspondants à un même point donné z , compris dans la partie positive de R'_i , est toujours fini et il surpasse d'une unité le nombre des points correspondants à z compris dans la partie négative.

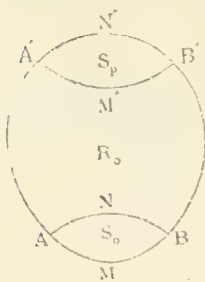
Nous ferons peu d'usage de cette subdivision du plan en régions R_i concaves, parce que la subdivision en régions convexes est infiniment plus commode, mais elle pourra nous servir comme d'intermédiaire pour passer d'une subdivision convexe à une autre subdivision également convexe.

Puisqu'il y a une infinité de manières de subdiviser le plan en régions R_i convexes, nous devons choisir parmi ces diverses manières la plus simple et la plus commode.

Voici comment nous pourrions procéder: Nous déterminerons une région S_0 , et la région S_p transformée de S_0 par la substitution $f_p(z)$.

Nous ajouterons S_p à R_0 et nous en retrancherons S_0 .

Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir de base à une nouvelle subdivision du plan en régions R'_i correspondant au groupe G . Car pour obtenir la région R'_i il suffira de retrancher de R_i la région S_i transformée de S_0 par $f_i(z)$ et d'y ajouter la région S_{i_p} transformée de S_p par $f_i(z)$. Comment maintenant conviendra-t-il de choisir les régions S_0 et S_p ?



Soit AMB un côté de R_0 , $A'M'B'$ le côté conjugué. Ces deux côtés sont congruents et la substitution réelle qui change AMB en $A'M'B'$ est une substitution $f_p(z)$ du groupe G . Joignons les points A et B par un arc de cercle ANB ayant son centre sur X . La région S_0 sera la région $AMBNA$ comprise entre l'arc de courbe AMB et l'arc de cercle ANB . Le transformé de ANB par $f_p(z)$ sera un arc de cercle $A'N'B'$ ayant son centre sur X , et la transformée S_p de S_0 sera la région $A'M'B'N'A'$. Si nous ajoutons S_p à R_0 et que nous en retranchions S_0 , nous obtiendrons une région R'_0 analogue à R_0 mais où les côtés conjugués AMB , $A'M'B'$ seront devenus des arcs de cercle ANB , $A'N'B'$ ayant leurs centres sur X .

En opérant de même manière sur chaque paire de côtés conjugués de la 1^{ère} sorte, on réduira tous ces côtés à des arcs de cercle ayant leurs centres sur X . On peut donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone dont les côtés sont de deux sortes, les uns sont des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , les autres sont des segments de cet axe X lui-même. Un pareil polygone s'appellera *polygone normal*.

Mais une difficulté spéciale peut se présenter dans certains cas.

En effet nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir si la région:

$$S_0 = AMBNA$$

faisait tout entière partie de R_0 . Il pourra donc se faire que le polygone normal auquel on aura réduit la région R_0 soit concave.

Voici comment on se tirerait d'affaire en pareil cas. Il est clair que la partie positive et la partie négative de R_0 devront être toutes deux des polygones normaux. Supposons pour fixer les idées que la partie positive contienne au plus deux points correspondants à un point donné z . Parmi les points de R_0 , il y en aura qui seront compris dans la partie positive et qui n'admettront aucun correspondant soit dans la partie positive, soit dans la partie négative. Ils formeront un certain polygone normal P .

La partie négative formera un certain polygone normal P' ; et à chaque point de cette partie négative correspondront deux points de la partie positive dont l'ensemble formera deux polygones normaux P'' et P''' , tous deux congruents à P' . Cela posé, retranchons de R_0 le polygone P'' et ajoutons-y le polygone congruent P' . Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir comme R_0 à engendrer le groupe

fuchsien G . Cette région n'aura plus de partie négative et sera formée des deux polygones P et P''' .

Ce sera donc un *polygone normal convexe*.

On voit ainsi que dans tous les cas possibles, on peut supposer que R_0 est un polygone normal convexe.

Si l'on connaît le polygone normal R_0 et la distribution de ses côtés en paires de côtés conjugués, le groupe G est entièrement déterminé.

En effet reportons-nous à ce que nous avons vu dans le § précédent:

Les substitutions fondamentales de G sont celles qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 ; on les obtiendra donc en envisageant un des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 et en cherchant quelle est la substitution qui change ce côté en son conjugué. Or soient AB et $A'B'$ deux côtés conjugués. Ces deux côtés, d'après le § 3, devront être congruents, c'est à dire que l'on aura:

$$(A, B) = (A', B').$$

Or dans ce cas, d'après le § 1, il existe une substitution réelle qui change AB en $A'B'$ et en général cette substitution est parfaitement déterminée. Les substitutions fondamentales du groupe G et par conséquent le groupe G lui-même sont donc parfaitement déterminés.

C'est pour cette raison que j'appellerai le polygone R_0 *polygone générateur* du groupe G .

§ 5. Classification en familles.

Nous avons vu plus haut que deux, trois ou plusieurs des sommets du polygone R_0 peuvent être des points correspondants et nous avons appelé cycle l'ensemble des sommets de ce polygone qui sont correspondants à l'un d'entre eux.

Les sommets de R_0 se répartissent de la sorte en un certain nombre de cycles. Voyons comment, connaissant la distribution en paires des côtés de la 1^{ère} sorte, on pourra trouver la distribution des sommets en cycles. Pour cela il suffit d'appliquer la règle suivante que l'on démontrerait sans peine.

Supposons qu'on parcourt dans un certain sens le périmètre du polygone R_0 , et qu'on rencontre successivement un côté, puis un sommet,

puis un autre côté, puis un autre sommet et ainsi de suite. Cela posé, partons d'un sommet quelconque; envisageons le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte; puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte, et ainsi de suite. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive à un côté de la 2^{de} sorte.

Dans le premier cas, tous les sommets que l'on aura rencontrés de la sorte formeront un cycle. Dans le second cas, il sera nécessaire pour compléter le cycle de reprendre le sommet qui a servi de point de départ et de remonter à partir de ce sommet, en considérant successivement le côté précédent, puis son conjugué si ce côté est de la 1^{ère} sorte, puis le sommet précédent, puis le côté précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on finisse par arriver à un côté de la 2^{de} sorte.

Il est aisé de voir qu'il y a trois catégories de cycles: Tout point correspondant d'un point z situé au dessus de X est lui-même au dessus de X , donc tout sommet correspondant d'un sommet de la 1^{ère} catégorie (§ 3) est lui-même de la 1^{ère} catégorie. Il y aura donc des cycles formés uniquement de sommets de la 1^{ère} catégorie; ce seront les *cycles de la 1^{ère} catégorie*. En partant d'un sommet de la 1^{ère} catégorie et prenant successivement les côtés et les sommets que l'on rencontre en appliquant la règle précédente, on ne rencontrera jamais que des sommets de la 1^{ère} catégorie et par conséquent aussi jamais que des côtés de la 1^{ère} sorte. On ne sera donc arrêté que quand on sera revenu au sommet qui aura servi de point de départ, c'est à dire que le cycle sera *fermé*.

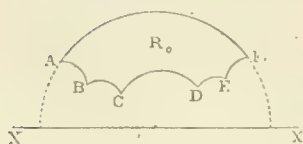
Tout sommet correspondant d'un sommet de la 2^{de} ou de la 3^{me} catégories, devra lui-même appartenir à l'une des deux catégories. Ce qui nous amène à considérer deux nouvelles classes de cycles.

Les *cycles de la 2^{de} catégorie* ne contiendront que des sommets de la 2^{de} catégorie; en leur appliquant la règle précédente, on ne rencontrera pas de côté de la 2^{de} sorte, c'est à dire que le cycle sera encore *fermé*.

Les *cycles de la 3^{me} catégorie* contiendront des sommets de la 3^{me} catégorie et pourront en contenir également de la 2^{de}; en leur appliquant la règle précédente, on rencontrera des côtés de la 2^{de} sorte, c'est à dire que le cycle sera *ouvert*. Cela va nous permettre de classer en familles les polygones R_0 et par conséquent les groupes G .

Le polygone R_0 sera
 de la 1^{ère} famille s'il a des cycles de la 1^{ère} catégorie seulement
 » » 2^{me} » » » » » » 2^{me} » »
 » » 3^{me} » » » » » » 3^{me} » »
 » » 4^{me} » » » » » » 2^{me} et de la 3^{me} catégorie seulement
 » » 5^{me} » » » » » » 1^{ère} » » » 3^{me} » »
 » » 6^{me} » » » » » » 1^{ère} » » » 2^{me} » »
 » » 7^{me} » » » » » des trois catégories.

Quelques exemples feront mieux comprendre ma pensée.



Exemple I. Le polygone R_0 est un hexagone $ABCDEF$; tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte; les côtés

AB et AF

BC et FE

CD et ED

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement:

1° en partant du sommet A , le sommet A , le côté AB , le côté AF et le sommet A .

2° en partant de B , le sommet B , puis BC , puis EF , puis F , puis FA , puis AB , puis B .

3° en partant de C , le sommet C , puis CD , puis ED , puis E , puis EF , puis BC , puis C .

4° en partant de D , le sommet D , puis DE , puis CD , puis D .

Il y a donc quatre cycles formés respectivement:

1° du sommet A

2° des sommets B et F

3° des sommets C et E

4° du sommet D .

Exemple II. Le polygone R_0 est toujours un hexagone $ABCDEF$ dont tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte; mais les côtés opposés

AB et DE

BC et EF

CD et FA

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement

1° en partant de A , le sommet A , puis AB , puis DE , puis E , puis EF , puis BC , puis C , puis CD , puis FA , puis A .

2° en partant de B , le sommet B , puis BC , puis EF , puis F , puis FA , puis CD , puis D , puis DE , puis AB , puis B .

Il y a donc deux cycles formés respectivement:

1° des sommets A, C et E

2° des sommets B, D et F .

Exemple III. Le polygone R_0 est un octogone $ABCDEFGH$ dont tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, les côtés opposés:

AB et EF

BC et FG

CD et GH

DE et HA

sont conjugués.

Partons du sommet A , nous rencontrons successivement: A , AB , EF , F , FG , BC , C , CD , GH , H , HA , DE , E , EF , AB , B , BC , FG , G , GH , CD , D , DE , HA , A .

Tous les sommets font donc partie d'un même cycle.

Exemple IV. Supposons maintenant que les côtés:

AB et CD

BC et DE

EF et GH

FG et HA

soient conjugués.

Partons encore de A , nous rencontrerons:

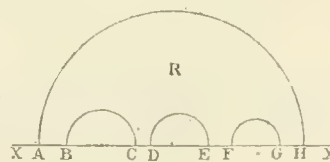
A , AB , CD , D , DE , BC , C , CD , AB , B , BC , DE , E , EF , GH , H , HA , FG , G , GH , EF , F , FG , HA , A .

Tous les sommets font encore partie d'un même cycle.

Dans les quatre exemples précédents, tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, tous les cycles sont donc de la 1^{ère} ou de la 2^{de} catégories.

Exemple V. Le polygone R_0 est encore un octogone $ABCDEFGH$.

Les côtés AB , CD , EF , GH sont de la 1^{ère} sorte, les côtés BC , DE , FG , HA sont de la 2^{de} sorte. Les côtés:



AB et *CD**EF* et *GH*

sont conjugués. On rencontrera successivement:

1° en partant de *A*, le côté *AB*, puis *CD*, puis *D*, puis *DE* qui est de la 2^{de} sorte.

2° en partant de *C*, le côté *CD*, puis *AB*, puis *B*, puis *BC* qui est de la 2^{de} sorte.

3° en partant de *E*, le côté *EF*, puis *GH*, puis *H*, puis *HA* qui est de la 2^{de} sorte.

4° en partant de *G*, le côté *GH*, puis *EF*, puis *F*, puis *FG* qui est de la 2^{de} sorte.

Les sommets se répartissent donc en 4 cycles formés respectivement:

1° de *A* et de *D*, 2° de *C* et de *B*, 3° de *E* et de *H*, 4° de *G* et de *F*.

Ces cycles sont *ouverts*, puisque dans la recherche de chacun d'eux on a été arrêté par la rencontre d'un côté de la 2^{de} sorte. Ils sont donc de la 3^{me} catégorie.

On peut pousser plus loin encore la classification des polygones R_0 et des groupes G . Voici de quelles considérations nous pourrions faire usage à cet effet.

Considérons d'abord un cycle de la 1^{ère} catégorie et un sommet A_0 de R_0 faisant partie de ce cycle. Soit B_1 le côté suivant, C_1 son conjugué, A_1 le sommet suivant, B_2 le côté suivant, C_2 son conjugué, A_2 le sommet suivant et ainsi de suite, on poursuivra de la sorte jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet A_n coïncidant avec A_0 .

On pourra même poursuivre indéfiniment de cette façon sans être jamais arrêté puisque l'on ne rencontrera pas de côté de la 2^{de} sorte. Mais le sommet A_n ne différera pas de A_0 , le sommet A_{n+1} de A_1 , et en général le sommet A_h de A_k si on a

$$h \equiv k \pmod{n}.$$

Le cycle se compose alors de n sommets distincts, à savoir A_0, A_1, \dots, A_{n-1} .

Supposons maintenant que l'on décrive autour de A_0 un cycle infiniment petit quelconque; on sortira de R_0 par le côté B_1 , pour entrer dans le polygone R_1 . Considéré comme appartenant à ce dernier polygone, le côté B_1 sera l'homologue de C_1 ; par conséquent le point A_0 sera l'ho-

mologue de A_1 et le côté suivant sera l'homologue de B_2 . Le cycle infiniment petit décrit autour de A_0 sortira ensuite du polygone R_1 en franchissant ce côté homologue de B_2 et entrera dans un certain polygone que j'appelle R_2 . Considéré comme appartenant à ce polygone, le côté qui dans R_1 était homologue de B_2 sera homologue de C_2 ; le point A_0 sera homologue de A_2 et le côté suivant l'homologue de B_3 .

On continuera de la sorte, la loi est manifeste. On passera successivement dans les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{q-1}$ et enfin dans R_q qui devra se confondre avec R_0 .

On sortira du polygone R_k pour entrer dans le polygone R_{k+1} en franchissant un côté qui envisagé comme appartenant à R_k sera l'homologue de B_{k+1} et envisagé comme appartenant à R_{k+1} sera l'homologue de C_{k+1} . Le sommet A_0 envisagé comme appartenant à R_k sera l'homologue de A_k .

Mais le polygone R_q doit se confondre avec R_0 ; donc le sommet A_q ne doit pas différer de A_0 , on a donc

$$q \equiv 0 \pmod{n}$$

d'où:

$$q = pn.$$

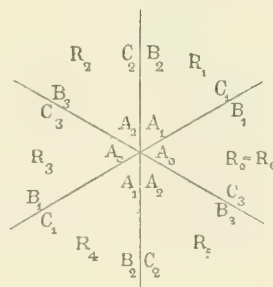
Le nombre des polygones qui ont un sommet en A_0 sera donc divisible par n .

La figure ci-jointe éclaircira peut-être ce qui précède. Nous y avons supposé

$$n = 3, \quad p = 2.$$

Nous n'avons représenté que les parties des polygones qui sont infiniment voisines de A_0 ; c'est pourquoi chacun de ces polygones est représenté seulement par un angle. Dans le voisinage de chaque sommet A (ou de chaque côté B ou C) et à l'intérieur de chaque polygone R_i , nous avons marqué une lettre indiquant quel est le sommet (ou le côté) de R_0 dont ce sommet A (ou ce côté B ou C) est l'homologue si on l'envisage comme faisant partie du polygone R_i .

Nous avons donc autour du point A_0 pn angles dont la somme doit être égale à 2π , et comme dans deux polygones congruents les angles homologues sont égaux, on aura:



$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{q-1} = 2\pi.$$

Or on a :

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \dots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1}.$$

Il vient donc :

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p}$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

La somme des angles de R_0 qui correspondent aux sommets d'un même cycle de la 1^{ère} catégorie est une partie aliquote de 2π .

Mais ici deux cas peuvent se présenter : ou bien la somme de ces angles sera égale à 2π , ou bien à 2π divisé par un nombre entier plus grand que 1.

Dans le premier cas je dirai que le cycle appartient à la 1^{ère} sous-catégorie ; dans le second cas, qu'il appartient à la 2^e sous-catégorie.

Les propriétés des cycles de ces deux sous-catégories ne sont pas tout à fait les mêmes ; c'est ce qui nous engage à faire dans la 1^{ère} famille une coupure, et à séparer, sous le nom de 1^{er} ordre, les polygones R_0 dont tous les cycles sont de la 1^{ère} sous-catégorie, pendant que les autres polygones R_0 qui auront un cycle de la 2^{de} sous-catégorie formeront le 2^e ordre.

Reprenons les polygones R_0, R_1, \dots, R_{q-1} qui ont un sommet en A_0 .

Envisageons la substitution réelle qui change R_0 en R_n et qui fait évidemment partie du groupe G . Cette substitution ne changera pas le point A_0 qui devra par conséquent en être un point double. C'est donc une substitution elliptique ; elle pourra se mettre sous la forme (3) § 1 et de telle sorte que

$$K = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Supposons maintenant que le point A_0 au lieu d'appartenir à un cycle de la 1^{ère} catégorie, appartienne à un cycle de la 2^e catégorie. Tous les raisonnements précédents s'appliqueront, puisque nous n'avons supposé qu'une chose : c'est que le cycle était fermé, et puisque cela est vrai des cycles de la 2^{de} comme de ceux de la 1^{ère} catégorie. Seulement le nombre q et par conséquent le nombre p seront infinis. La somme des angles correspondant aux divers sommets du cycle sera donc nulle et c'est ce qu'il était

aisé de prévoir, puisque tout angle d'un polygone normal dont le sommet est sur X est évidemment nul. La substitution réelle qui change R_0 en R_n ne changera pas A_0 . Ce sommet en sera donc un point double, et comme il est sur X , la substitution sera parabolique ou hyperbolique.

Soit S cette substitution; soit C_k le côté qu'il faut franchir pour passer de R_k dans R_{k+1} . C_{k+n} sera le transformé de C_k par S , de sorte que les divers côtés C_k seront les transformés successifs de C_0 , C_1 , C_{n-1} par la substitution S et la substitution inverse.

Supposons d'abord que la substitution S soit parabolique. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X ne peut rencontrer qu'un nombre fini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 par une substitution telle que S et par sa substitution inverse. Un pareil arc ne passera donc qu'à travers un nombre fini des polygones R_0 , R_1 , R_q , qui ont un sommet en A_0 .

Supposons au contraire que la substitution S soit hyperbolique. Soient A_0 et A'_0 les deux points doubles de cette substitution, C le cercle décrit sur $A_0 A'_0$ comme diamètre. Nous avons vu (§ 1) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X rencontre un nombre infini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 ou n'en rencontre qu'un nombre fini, suivant qu'il coupe ou ne coupe pas le cercle C . Un pareil arc traversera donc un nombre infini des polygones R_0 , R_1 , R_q , s'il coupe C , et il n'en traversera qu'un nombre fini s'il ne coupe pas C . Si la substitution S est parabolique, nous dirons que le cycle auquel appartient A_0 est de la 3^{me} sous-catégorie; si elle est hyperbolique, nous dirons que le cycle est de la 4^e sous-catégorie.

Cela va nous permettre de subdiviser les 2^e, 4^e, 6^e, 7^e familles.

Un groupe de l'une de ces familles appartiendra au 1^{er} ordre de cette famille s'il ne contient pas de cycle de la 4^e sous-catégorie, et au 2^d ordre s'il contient des cycles de la 4^e sous-catégorie.

§ 6. Existence des groupes fuchsien.

Jusqu'ici nous avons raisonné sur les groupes fuchsien en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien G peut être considéré comme engendré par un polygone normal R_0 dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la

1^{ère} sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X , ceux de la 2^{de} sorte sont des segments de l'axe X lui-même. Les côtés de la 1^{ère} sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connaît le polygone R_0 et la répartition de ses côtés en paires, le groupe G correspondant est en général parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.

Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien G , le polygone R_0 doit satisfaire à deux conditions:

1° *Deux côtés conjugués doivent être congruents.*

2° *La somme des angles d'un même cycle de la 1^{ère} catégorie doit être une partie aliquote de 2π .*

Ces conditions sont nécessaires; sont elles suffisantes? C'est ce que je vais démontrer.

Je suppose que le polygone R_0 soit donné, ainsi que la distribution de ses côtés de la 1^{ère} sorte. De cette connaissance résulte celle des substitutions fondamentales du groupe correspondant et par conséquent la possibilité de construire les polygones R limitrophes de R_0 . Opérant sur ceux-ci comme on a opéré sur R_0 , on construira les polygones limitrophes des polygones déjà obtenus et continuant indéfiniment cette opération, on construira une infinité de polygones congruents à R_0 . Mais ici plusieurs hypothèses peuvent être faites:

1° Ou bien les polygones ainsi construits couvriront une partie du plan mais ne la couvriront qu'une fois de manière à ne pas empiéter les uns sur les autres et à ne pas se recouvrir mutuellement. Alors ils formeront une sorte de damier; la portion du plan envisagée sera partagée en un certain nombre de régions congruentes entre elles. *L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 sera donc démontrée.*

2° Ou bien les polygones construits de la sorte empièteront les uns sur les autres de façon à recouvrir une partie du plan plusieurs fois ou même une infinité de fois. Dans ce cas le groupe auquel conduirait R_0 (c'est à dire le groupe dont les substitutions fondamentales sont celles qui changent chaque côté de la 1^{ère} sorte de R_0 en son conjugué) est continu; ce n'est pas un groupe fuchsien.

Comment reconnaitrons-nous maintenant quel est celui de ces deux cas auquel nous avons affaire? Considérons un point quelconque A , intérieur à R_0 , et un second point B quelconque. Joignons A à B par un

arc de courbe quelconque AMB . Cet arc sortira de R_0 par un certain côté C_0 ; on construira alors le polygone R_1 , limitrophe de R_0 le long de C_0 ; si AMB sort de R_1 par un côté C_1 , on construira le polygone R_2 , limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite.

Les arcs AMB seront de deux sortes:

1° Ou bien après un nombre fini d'opérations de ce genre on finira par trouver un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB , de telle façon que le point B soit à l'intérieur de R_n ; c'est alors que le point B se trouve dans la partie du plan recouverte par les polygones R et que l'arc AMB ne sort pas de cette partie du plan: l'arc AMB sera *de la 1^{ère} sorte*.

2° Ou bien, quelque grand que soit le nombre des opérations effectuées, on ne trouvera jamais un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB . L'arc AMB sera alors *de la 2^e sorte*.

Au sujet du point B on peut faire trois hypothèses:

1° Tous les arcs AMB que l'on peut tracer entre A et B sont de la 2^e sorte; le point B est alors hors de la partie du plan recouverte par les polygones R .

2° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B , il y en a de la 1^{ère} sorte; chacun de ces arcs conduit, d'après ce qui précède, à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B . De plus ce polygone R_n est *le même* quel que soit l'arc AMB de la 1^{ère} sorte par lequel on a joint les deux points A et B . Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R ; de plus ces polygones ne recouvrent cette partie du plan qu'une seule fois et l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée.

3° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B il y en a de la 1^{ère} sorte, chacun d'eux conduit à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B ; mais ce polygone change quand on change l'arc AMB . Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R ; mais ces polygones recouvrent cette partie du plan plus d'une fois de telle sorte qu'il n'y a pas de groupe fuchsien correspondant à R_0 .

Nous sommes donc conduits à la règle suivante.

Il faut joindre deux points A et B par deux arcs AMB , ANB de la 1^{ère} sorte et rechercher si ces deux arcs conduisent à un même polygone R_n .

Mais nous pouvons la modifier de la manière suivante: On trace un

contour fermé AMA , dont le point initial et final A est intérieur à R_0 ; si cet arc AMA sort de R_0 par un côté C_0 , on construira le polygone R_1 , limitrophe de R_0 le long de C_0 ; s'il sort de R_1 par un côté C_1 , on construira le polygone R_2 , limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite. Je suppose de plus que l'arc AMA soit de la 1^{ère} sorte, c'est à dire qu'on l'ait choisi de telle manière qu'après un nombre fini d'opérations, on arrive à un polygone R_n d'où ne sorte plus l'arc AMA . *Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que, quel que soit le contour AMA de la 1^{ère} sorte, le polygone R_n soit précisément R_0 .*

Supposons d'abord que le polygone R_0 envisagé n'admette pas de cycle de la 4^e sous-catégorie.

Dans ce cas j'énoncerai les théorèmes suivants:

I. *Tout arc de courbe AMB qui coupe X est de la 2^e sorte.* En effet le polygone R_0 est tout entier au-dessus de X et il en est par conséquent de même de tous les polygones R qui lui sont congruents. Supposons qu'on construise les polygones R_1, R_2 , etc. R_n comme il a été dit plus haut. Ils seront tous dans la partie du plan située au dessus de X et comme l'arc AMB doit sortir de cette partie du plan, il devra sortir de R_n quelque grand que soit n . C. Q. F. D.

II. *Tout arc AMB qui ne coupe pas X est de la 1^{ère} sorte.* En effet je construis comme il a été dit plus haut les polygones

$$R_1, R_2, \dots, R_p, \dots$$

et j'appelle λ_p la portion de l'arc AMB qui est à l'intérieur du polygone R_p . L'arc AMB va se trouver décomposé en une série d'arcs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ correspondant à la série des polygones R_0, R_1, R_2, \dots . Le nombre de ces arcs (qui est celui des polygones correspondants) sera fini si AMB est de la 1^{ère} sorte (ce que nous nous proposons de démontrer) et infini dans le cas contraire.

L'arc λ_p joindra évidemment deux côtés de la 1^{ère} sorte du polygone R_p , car il ne doit pas couper X et ne peut par conséquent aboutir à un côté de la 2^e sorte puisque ces côtés sont des segments de X . On peut d'ailleurs faire deux hypothèses:

1° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p sont deux côtés consécutifs du polygone R_p séparés seulement par un

sommet A_p de ce polygone. Je dirai que λ_p est de la 1^{ère} espèce et qu'il sous-tend le sommet A_p . Exemples, les arcs CD et FG de la figure en bas.

2° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p ne sont pas consécutifs, et dans ce cas je dirai que λ_p est de la 2^e espèce. Exemple, l'arc AB de la figure. Le polygone R_p étant congruent à R_0 , l'arc λ_p sera congruent à un certain arc λ joignant deux points du périmètre de R_0 appartenant à deux côtés non consécutifs. Il est clair que la distance de ces deux points ne pourra être infiniment petite et que par conséquent la L (voir § 1) de cet arc λ ne sera pas non plus infiniment petite, mais sera plus grande qu'une certaine quantité donnée K . La L de l'arc λ_p sera la même que celle de l'arc congruent λ ; elle sera donc plus grande que K .

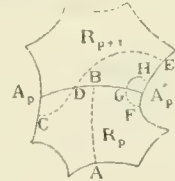
Soit L_0 la L de l'arc AMB ; elle est finie parce que cet arc ne coupe pas X . Le nombre des arcs λ_p de la seconde espèce sera donc plus petit que $\frac{L_0}{K}$, et par conséquent *limité*.

On pourra donc prendre q assez grand pour que les arcs λ_{q+1} , λ_{q+2} , et en général les arcs λ_p où $p > q$ soient tous de la 1^{ère} espèce; il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p ($p > q$) est fini.

J'envisage deux arcs consécutifs λ_p et λ_{p+1} et l'arc $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$ formé par leur réunion; je dirai que l'arc μ_p est de la 1^{ère} catégorie si les arcs λ_p et λ_{p+1} sous-tendent un même sommet, et de la 2^e catégorie dans le cas contraire. Ainsi l'arc CE de la figure sera de la 2^e catégorie et l'arc FH de la première, parce que l'arc CD sous-tend le sommet A_p pendant que les arcs FG , GH et DE sous-tendent le sommet A'_p .

Envisageons un arc μ_p de la 2^e catégorie: il aboutira à deux côtés de la 1^{ère} sorte appartenant l'un à R_p , l'autre à R_{p+1} et il traversera le côté C_p qui sert de frontière commune à ces deux polygones; d'ailleurs ces trois côtés n'ont aucun point commun.

Le polygone R_p étant congruent à R_0 , le côté C_p sera congruent à un des côtés H de R_0 . Soit R' celui des polygones R qui est limitrophe de R_0 le long de H ; l'arc μ_p sera congruent d'un certain arc μ dont l'une des extrémités sera sur un des côtés B de R_0 et l'autre sera sur un des côtés B' de R' ; cet arc traversera le côté H . D'ailleurs les trois côtés B , H et B' n'auront aucun point commun.



Dans ces conditions il est clair que la L de l'arc μ et par conséquent celle de μ_p n'est pas infiniment petite et est plus grande qu'une quantité fixe K . Il suit de là, comme plus haut, que le nombre des arcs μ_p de la 2^{me} catégorie est *limité* et qu'on pourra prendre q assez grand pour que tous les arcs $\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \dots$ et en général μ_p ($p > q$) soient tous de la 1^{ère} catégorie; en d'autres termes tous les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}$ etc. et en général tous les arcs λ_p ($p > q$) sous-tendront un même sommet D .

Il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p sous-tendant le sommet D est fini. Nous pouvons faire deux hypothèses:

1° Ou bien D appartient à un cycle de la 1^{ère} ou de la 3^{me} catégorie, et alors ce sommet n'appartient qu'à un nombre fini de polygones R , et par conséquent le nombre des arcs λ_p est nécessairement fini.

2° Ou bien D appartient à un cycle de la 2^{de} catégorie, c'est à dire de la 3^{me} sous-catégorie, puisque nous avons supposé que le polygone R_0 n'admettait pas de cycles de la 4^{me} sous-catégorie. Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe ne coupant pas X ne pouvait traverser qu'un nombre fini des polygones auxquels appartient le sommet D . Il suit de là que le nombre des arcs λ_p est fini.

Donc dans tous les cas, le nombre des arcs λ_p est fini; donc l'arc AMB est de la 1^{ère} sorte. C. Q. F. D.

Donc la partie du plan recouverte par les polygones R est la partie située au-dessus de X .

Considérons maintenant un contour fermé AMA de la 1^{ère} sorte, c'est à dire ne coupant pas X ; appliquons lui la règle exposée plus haut et supposons qu'en le parcourant on rencontre successivement les polygones R_0, R_1, \dots pour arriver au polygone R_n quand on sera de retour au point A . Si le polygone R_n est précisément R_0 , je dirai que AMA est de la 1^{ère} espèce et, dans le cas contraire, qu'il est de la 2^{de} espèce. Pour que le groupe fuchsien existe il faut et il suffit que tous les contours AMA de la 1^{ère} sorte soient de la 1^{ère} espèce. A ce sujet je démontrerai successivement les théorèmes suivants:

III. *Si le contour AMA se compose 1° d'un arc de courbe AMB , 2° d'un contour fermé infiniment petit BNB , 3° de l'arc AMB parcouru en sens contraire, il est de la 1^{ère} espèce.*

En effet construisons successivement, d'après la règle exposée plus haut, les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots, R_m$ que l'on rencontre en parcourant l'arc

AMB. Parcourons ensuite le contour infiniment petit *BNB*. On peut faire au sujet de ce contour trois hypothèses:

1° Ou bien *BNB* reste tout entier à l'intérieur du polygone R_m et alors parcourant ce contour on ne sortira pas de ce polygone.

2° Ou bien *BNB* franchit un des côtés C_m de R_m mais sans envelopper un des sommets de ce polygone. Alors en suivant le contour, on sortira d'abord de R_m en franchissant le côté C_m pour entrer dans un nouveau polygone R_{m+1} , puis on sortira de R_{m+1} en franchissant le côté C_m en sens contraire et par conséquent en rentrant dans R_m .

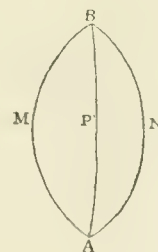
3° Ou bien *BNB* enveloppe un des sommets de R_m . Ce sommet sera forcément de la 1^{ère} catégorie puisqu'il ne pourra être sur *X*. Ce sommet appartiendra à un cycle comprenant par exemple n sommets et la somme des angles correspondants sera $\frac{2\pi}{p}$. On rencontrera alors en parcourant *BNB* successivement pn polygones $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+pn}$; la somme des angles en *D* de tous ces polygones étant 2π , R_{m+pn} se confondra avec R_m .

Donc dans tous les cas possibles, on retombera sur le polygone R_m après avoir parcouru le contour *BNB*. Parcourons maintenant l'arc *AMB* en sens contraire; nous rencontrerons successivement les polygones $R_m, R_{m-1}, \dots, R_1, R_0$, c'est à dire, dans l'ordre inverse, ceux que nous avons rencontrés en parcourant une première fois l'arc *AMB*. Quand nous serons de retour au point *A*, nous retomberons sur le polygone R_0 . Donc le contour *AMA* sera de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.

IV. Si deux contours *AMBPA*, *APBNA* sont de la 1^{ère} sorte et de la 1^{ère} espèce, il en sera de même du contour *AMBNA* formé par leur réunion.

En effet si *AMBPA*, *APBNA* sont de la 1^{ère} sorte, c'est que ni *AMB*, ni *ANB* ne sortent de la région recouverte par les polygones *R* et par conséquent que *AMBNA* est aussi de la 1^{ère} sorte.

Si *AMBPA* est de la 1^{ère} espèce on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *APB*; si *APBNA* est de la 1^{ère} espèce on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *APB* ou l'arc *ANB*. Donc on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc *AMB* ou l'arc *ANB*. Donc *AMBNA* est de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.



V. *Si un contour AMA est de la 1^{ère} sorte, tout contour ANA qui lui est intérieur est aussi de la 1^{ère} sorte.*

En effet si AMA ne coupe pas X , il en sera de même du contour intérieur ANA . C. Q. F. D.

VI. *Un contour quelconque AMA de la 1^{ère} sorte est de la 1^{ère} espèce.*

En effet ce contour pourra être décomposé en une infinité de contours comme ceux qui sont considérés dans le théorème III. En vertu du théorème V, ces contours sont tous de la 1^{ère} sorte; donc en vertu du théorème III chacun d'eux est de la 1^{ère} espèce, donc en vertu du théorème IV le contour total lui-même AMA est de la 1^{ère} espèce. C. Q. F. D.

L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

Les polygones R transformés de R_0 par les diverses substitutions de ce groupe recouvriront toute la partie du plan située au-dessus de X et ne la recouvriront qu'une fois.

Je suppose maintenant que R_0 admette des cycles de la 4^{me} sous-catégorie.

Les théorèmes I, III et IV seront évidemment encore vrais. Mais il n'en sera pas de même du théorème II. Voyons comment il faudra le modifier dans le cas qui nous occupe.

Reprenons les notations de ce théorème. On démontrera comme plus haut que l'on peut prendre q assez grand pour que tous les arcs λ_p où $p > q$ soient de la 1^{ère} espèce et sous-tendent un même sommet D . Je n'ai rien à ajouter pour le cas où D est de la 1^{ère} ou de la 3^{me} catégorie, ou bien de la 3^{me} sous-catégorie. Supposons maintenant que D soit de la 4^{me} sous-catégorie. Le nombre des arcs λ_p ($p > q$) sera-t-il fini ou infini? Nous avons vu (§ 5) qu'un arc de courbe qui ne coupe pas X traverse un nombre infini des polygones R qui ont un sommet en D ou seulement un nombre fini, selon qu'il coupe ou ne coupe pas un certain cercle C passant par D et ayant son centre sur X .

Il suit de là qu'un arc AMB qui ne coupe pas X peut cependant être de la 2^{me} sorte.

Considérons un arc AMB de la 2^e sorte venant aboutir à un cercle C et supposons qu'il se déforme d'une façon continue, il ne pourra cesser d'être de la 2^{me} sorte qu'en cessant de couper C , comme il est aisé de le comprendre.

Le théorème V est encore vrai, mais il a besoin d'une démonstration nouvelle. Envisageons un contour fermé AMA qui soit de la 1^{ère} sorte et un second contour ANA intérieur au premier; je dis que ce second contour ne peut être de la 2^{de} sorte: en effet s'il en était ainsi, il devrait couper un certain cercle C ; on pourrait passer du contour ANA au contour AMA d'une façon continue, et en variant de la sorte, le contour ANA ne cesserait pas de couper C : il ne cesserait donc pas d'être de la 2^{de} sorte, de manière que AMA devrait être de la 2^{de} sorte, ce que nous n'avons pas supposé.

Le théorème V étant démontré, le théorème VI doit être vrai également et par conséquent *l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée*. Les polygones R , transformés de R_0 par les substitutions de ce groupe, recouvrent toute une partie du plan S et ne la recouvrent qu'une fois. Cette région S est tout entière au-dessus de X et elle est limitée par des segments de cet axe et par une infinité de cercles tels que C ayant leurs centres sur X .

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 ; mais la démonstration peut être considérablement simplifiée dans certains cas particuliers, par exemple quand on n'a pas de sommet de la 1^{ère} catégorie. Dans ce cas, en effet, le polygone R_0 , s'il a $2n$ côtés de la première sorte, divise la partie du plan située au dessus de X en $2n + 1$ régions, à savoir le polygone R_0 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte. Considérons un côté C_1 , la région S_1 , comprise entre C_1 et X et le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_1 . Le polygone R_1 subdivisera la région S_1 en $2n$ régions plus petites, à savoir le polygone R_1 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte restés libres. Quand on aura construit plusieurs polygones R_0, R_1, \dots, R_p , la partie du plan située au dessus de X se trouvera partagée en un certain nombre de régions, à savoir les polygones R_0, R_1, \dots, R_p et les régions S_1, S_2, \dots, S_q comprises entre X et chacun des côtés de la 1^{ère} sorte restés libres. Si l'on cherche à construire un nouveau polygone limitrophe de R_0, R_1, \dots, R_p , il se trouvera tout entier dans une des régions S_1, S_2, \dots, S_q . Il est donc impossible que les polygones ainsi construits se recouvrent mutuellement. L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

§ 7. Principaux exemples.

Avant de donner quelques exemples de ces groupes fuchsien dont je viens de démontrer l'existence d'une manière générale, je vais expliquer une notation dont je me servirai dans la suite pour définir certaines propriétés du polygone R_0 . Je commencerai par désigner chacun des côtés de R_0 par un numéro d'ordre de telle sorte qu'en parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens convenable, on rencontre successivement le côté 1, puis le côté 2, etc. Cela fait j'écrirai le numéro d'un des côtés de la 1^{ère} sorte, puis celui de son conjugué, puis une virgule, puis un autre côté de la 1^{ère} sorte, puis son conjugué, puis une virgule etc., puis enfin j'écrirai à la suite les numéros des côtés de la 2^{de} sorte. Par exemple, si R_0 est un octogone dont les côtés de rang impair soient de la 1^{ère} sorte, ceux de rang pair de la 2^{de} sorte et dont les côtés opposés de la 1^{ère} sorte soient conjugués, je dirai que le polygone R_0 est du système

(15, 37, 2468).

J'aurai ainsi défini le nombre des côtés de chaque sorte et la distribution des côtés en paires. De cette distribution des côtés en paires, nous déduirons celle des sommets en cycles.

Je vais maintenant étudier quelques exemples, en me servant des notations précédentes.

Exemple I. (14, 23).

Le polygone R_0 est un quadrilatère dont je désigne les sommets par $ABCD$; le côté 1 sera le côté AB ; le côté 2, le côté BC ; le côté 3, le côté CD ; le côté 4, le côté DA . Tous les côtés sont de la 1^{ère} sorte, ce sont donc des arcs de cercle ayant leur centre sur X ; les côtés AB et AD , CB et CD sont conjugués, ils sont donc congruents. Enfin l'angle A est égal à $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angle $B + D$ à $\frac{2\pi}{\beta}$, l'angle C à $\frac{2\pi}{\gamma}$; les nombres α , β , γ étant entiers.

Nous pouvons joindre les deux sommets opposés A et C par un arc de cercle ayant son centre sur X , le quadrilatère R_0 se trouvera ainsi décomposé en deux triangles curvilignes ACD et ABC .

Je voudrais maintenant définir une expression dont je serai quelquefois appelé à me servir dans la suite. Envisageons dans le plan une transformation par rayons vecteurs réciproques; soit O le centre de la transformation et K^2 son paramètre; le cercle C dont le centre est O et le rayon K demeure inaltéré par la transformation. Je dirai que cette transformation est une *réflexion sur le cercle C* et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à ce cercle*.

Cela posé, il est clair que les deux triangles ACD , ABC sont symétriques par rapport au cercle AC . Il suit de là que les angles curvilignes CAD et CAB , ACD et ACB , ABC et ADC sont égaux, et par conséquent que le triangle ABC a ses trois angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$.

Soit maintenant R_1 un quadrilatère limitrophe de R_0 , le long d'un de ses côtés, de AB par exemple; ces deux polygones seront symétriques par rapport au cercle AB .

Ceci nous conduit, dans le cas particulier qui nous occupe, à une construction très-simple du système des polygones R .

On construira d'abord un triangle ABC dont les trois angles seront respectivement $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$; on peut construire une infinité de pareils triangles mais ils sont tous congruents entre eux; on construira alors les triangles symétriques de ABC par rapport à leurs côtés restés libres et ainsi de suite. On partagera ainsi le plan en une infinité de triangles tous congruents à ABC ou à ACD et en les réunissant deux à deux, on aura partagé le plan en une infinité de quadrilatères congruents à $R_0 = ABCD$.

Qu'arrivera-t-il si l'un des nombres entiers α , β , γ devient infini; supposons par exemple que ce soit γ qui devienne infini; l'angle C qui était égal à $\frac{2\pi}{\gamma}$ deviendra nul; le sommet C cessera d'être de la 1^{re} catégorie pour devenir de la 3^{me} sous-catégorie. R_0 se composerait encore de deux triangles ABC , ADC symétriques par rapport au cercle AC . Les deux côtés AC et BC sont des arcs de cercle qui sont tangents en un point C situé sur X ; le côté AB est aussi un arc de cercle coupant AC et BC sous des angles $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\pi}{\beta}$.

Supposons en particulier:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Supposons de plus, pour achever de déterminer le triangle ABC , que les côtés AC et BC se réduisent à deux droites perpendiculaires à X de telle façon que le point C soit rejeté à l'infini; que la droite BC prolongée vienne passer par l'origine O ; que la distance des deux parallèles AC et BC soit égale à $\frac{1}{2}$. Le cercle AB aura alors pour centre O et pour rayon

1. On retombera ainsi sur le *Fundamentaldreieck* de M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV). Le groupe fuchsien correspondant est extrêmement remarquable; il se compose de toutes les substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ telles que a, b, c, d étant entiers, on ait $ad - bc = 1$. C'est la considération de ce groupe et des sous-groupes qui y sont contenus qui est le fondement des recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Exemple II. (16, 25, 34).

C'est l'exemple I du paragraphe 5. Le polygone R_0 est un hexagone $ABCDEF$ et les sommets forment quatre cycles distincts formés respectivement des sommets A ; BF ; CE ; D ; les angles curvilignes $A, B + F, C + E, D$ doivent être respectivement égaux à $\frac{2\pi}{\alpha}, \frac{2\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\gamma}, \frac{2\pi}{\delta}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres entiers positifs ou infinis.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone se décompose en deux quadrilatères $ABCD, ADEF$, symétriques par rapport au cercle AD . Dans ce cas on a pour les angles curvilignes de ces deux quadrilatères les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} BAD = DAF &= \frac{\pi}{\alpha}; & CDA = EDA &= \frac{\pi}{\delta}; \\ B = F &= \frac{\pi}{\beta}; & C = E &= \frac{\pi}{\gamma}. \end{aligned}$$

Pour construire tous les hexagones R , on pourra alors opérer comme dans l'exemple précédent; on construira le quadrilatère $ABCD$, puis les quadrilatères symétriques par rapport à chacun de ses côtés, puis les quadrilatères symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

Considérons maintenant un exemple plus général. Supposons que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte dont les sommets soient successivement $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \dots, B_2$. Supposons que les côtés

$A_1 A_2$ et $A_1 B_2$, $A_2 A_3$ et $B_2 B_3$, $A_{n-1} A_n$ et $B_{n-1} B_n$, $A_n A_{n+1}$ et $B_n A_{n+1}$ soient conjugués. Les sommets se répartiront en $n + 1$ cycles:

$$A_1; A_2 B_2; A_3 B_3; \dots\dots; A_{n-1} B_{n-1}; A_n B_n; A_{n+1}$$

et le polygone R_0 s'écrira dans le système de notation adopté:

$$(1.2n, 2.2n-1, 3.2n-2, \dots\dots, n-1.n+2, n.n+1).$$

Dans un certain cas particulier, ce polygone R_0 se divisera en deux moitiés $A_1 A_2 A_3 \dots\dots A_{n+1}$ et $A_1 B_2 B_3 \dots\dots B_n A_{n+1}$ symétriques par rapport au cercle $A_1 A_{n+1}$. Chacune de ces moitiés est un polygone curviligne dont les côtés ont leurs centres sur X et dont les angles sont des parties aliquotes de π . Pour construire tous les polygones R , il suffit de partir de $A_1 A_2 A_3 \dots\dots A_{n+1}$, de construire les polygones symétriques de celui-ci par rapport à l'un de ses côtés, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés et ainsi de suite.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de polygones générateurs de groupes fuchsien. Parlons seulement des exemples déjà cités au paragraphe 5. Avec le mode de notation adopté les polygones R_0 des exemples II, III, IV et V s'écriraient:

$$(14, 25, 36)$$

$$(15, 26, 37, 48)$$

$$(13, 24, 57, 68)$$

$$(13, 57; 2468).$$

Quelles sont les conditions auxquelles dans ces quatre exemples doit satisfaire le polygone R_0 pour donner naissance à un groupe fuchsien?

Dans les trois premiers exemples les côtés conjugués doivent être congruents. De plus dans l'exemple II, la somme des angles de rang pair, comme celle des angles de rang impair doit être une partie aliquote de 2π ; dans les exemples III et IV c'est la somme de tous les angles qui doit diviser 2π .

Dans l'exemple V, le polygone R_0 n'est assujetti à aucune condition.

§ 8. Classification en Genres.

J'ai fait voir dans ce qui précède comment on pouvait partager la partie du plan qui est au dessus de X en une infinité de polygones curvilignes

R congruents entre eux. Envisageons maintenant la partie du plan qui est au dessous de X , et dans cette partie du plan les polygones curvilignes R'_0, R'_1 , etc. qui sont respectivement symétriques de R_0, R_1 , etc. par rapport à X . Il est clair que si R_i est le transformé de R_0 par une certaine substitution $f_i(z)$ du groupe G , R'_i sera le transformé de R'_0 par cette même substitution. Les substitutions du groupe G qui transforment R_0 en R_1, R_2, \dots transformeront donc de même R'_0 en R'_1, R'_2, \dots . Mais plusieurs cas sont à considérer; si R_0 n'a pas de sommet de la 4^e sous-catégorie, l'ensemble des polygones R et R' recouvre tout le plan; si au contraire, nous avons des sommets de cette sous-catégorie, les polygones R et R' laissent non recouvertes les régions situées à l'intérieur d'une infinité de cercles ayant leurs centres sur X .

Voici une seconde distinction plus importante pour ce qui va suivre. Supposons que le groupe G soit de la 1^{ère}, de la 2^{me} ou de la 6^{me} familles, nous n'aurons ni sommet de la 3^e catégorie, ni côté de la 2^e sorte. Le polygone R_0 n'ayant pas pour côté de segment de X , sera complètement séparé de son symétrique R'_0 ou bien confinera à ce polygone par un sommet seulement (s'il a des sommets de la 2^e catégorie) et non par tout un côté. Supposons au contraire que le groupe G soit de la 3^e, de la 4^e, de la 5^e ou de la 7^e familles, le polygone R_0 aura un ou plusieurs côtés de la 2^e sorte et confinera à son symétrique R'_0 tout le long de ces côtés. Supposons qu'on supprime ces côtés de la 2^e sorte qui servent de frontière commune à R_0 et à R'_0 , on pourra considérer l'ensemble des deux figures $R_0 + R'_0$ comme une seule région qui sera limitée seulement par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , c'est à dire par les côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 et ceux de R'_0 . L'ensemble de ces arcs de cercle formera en général plusieurs courbes fermées séparées.

Nous allons maintenant pouvoir parler d'une nouvelle classification des groupes fuchsien. Considérons d'abord un groupe de la 1^{ère}, de la 2^e ou de la 6^{me} familles: le polygone R_0 n'aura pas de côté de la 2^e sorte; par conséquent les points du périmètre de R_0 seront correspondants deux à deux puisque à chaque point d'un côté de la 1^{ère} sorte correspond un point de son conjugué; les points intérieurs à R_0 n'auront aucun correspondant ni dans ce polygone, ni sur son périmètre; enfin tous les sommets d'un même cycle seront correspondants. Supposons qu'on découpe le polygone R_0 , puis qu'on le replie en le déformant d'une manière con-

tinue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, R_0 sera devenu une surface fermée. Si par exemple on reprend le quadrilatère $ABCD$ de l'exemple I du paragraphe précédent, et qu'après l'avoir découpé, on le replie en le déformant de telle sorte que AB vienne se coller contre AD , puis BC contre CD , R_0 aura pris l'aspect d'une surface fermée convexe.

Considérons maintenant un quadrilatère $ABCD$ du système (13, 24) de telle sorte que AB soit conjugué de CD et AC de BD . Replions le quadrilatère de façon à coller AB contre CD , il prendra l'aspect d'une sorte de cylindre ouvert par les deux bouts, les côtés AC et BD étant restés libres, mais étant devenus des courbes fermées; si on colle ensuite AC contre BD , le quadrilatère prendra l'aspect d'une sorte d'anneau fermé.

On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante. Sur une sphère, par exemple, on ne peut tracer un cycle fermé sans subdiviser la surface de la sphère en deux régions distinctes; il n'en est pas de même sur un tore dont un cercle méridien, par exemple, ne subdivise pas la surface en deux régions distinctes; mais on ne pourrait tracer sur le tore deux cycles fermés séparés sans obtenir une semblable subdivision.

Le genre d'une surface fermée est alors le nombre maximum des cycles fermés séparés que l'on peut tracer sur la surface sans la subdiviser en deux régions distinctes. Ainsi une surface fermée dans laquelle on aurait percé p trous serait de genre p .

Le genre d'un groupe fuchsien sera le genre de la surface fermée, obtenue comme il vient d'être dit par la déformation de R_0 .

Comment obtenir l'expression de ce genre?

Supposons qu'on ait subdivisé une surface de genre p en F polygones curvilignes, que le nombre total des côtés soit A et celui des sommets S , on aura la relation

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Reprenons le polygone R_0 ; soit $2n$ le nombre de ses côtés de la 1^{ère} sorte, et q celui des cycles fermés. Après la déformation, les côtés étant venus se coller l'un contre l'autre deux à deux, le nombre des côtés distincts restants sera n ; de même le nombre des sommets distincts restants sera q .

On aura donc:

$$F = 1 \qquad A = n \qquad S = q$$

d'où

$$q + 1 - n = 2 - 2p$$

ou

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Reprenons les exemples I et II du paragraphe précédent; nous aurons:

$$q = n + 1$$

d'où

$$p = 0.$$

Je vais donner une autre application de la règle qui précède.

Supposons que le polygone R_0 ait $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et de telle façon que les côtés opposés soient conjugués. Pour trouver le genre du groupe fuchsien correspondant, il faut chercher le nombre des cycles entre lesquels se répartissent les $2n$ sommets. En appliquant la règle du § 5, on trouve que tous les sommets appartiennent à un même cycle si n est pair, et que si n est impair, on a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. On a donc:

$$q = 1 \text{ ou } 2$$

selon que n est pair ou impair, et par conséquent:

$$p = \frac{n}{2}$$

si n est pair, et

$$p = \frac{n + 1}{2}$$

si n est impair.

Supposons maintenant que le polygone R_0 admette des côtés de la 2^e sorte; il sera contigu tout le long de ces côtés à R'_0 , de sorte que la région $R_0 + R'_0$ sera d'une seule pièce; les points situés à l'intérieur de cette région ne pourront être correspondants à aucun autre point de la région; les points du périmètre, qui appartiendront tous à des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 ou de R'_0 , seront correspondants deux à deux; enfin les sommets d'un même cycle seront des points correspondants. Découpons

maintenant la région $R_0 + R'_0$ et replions-la en la déformant de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre. Le genre du groupe fuchsien sera par définition celui de la surface fermée ainsi obtenue.

Soit encore $2n$ le nombre des côtés de la 1^{ère} sorte de R_0 , q celui de ses cycles fermés; R'_0 aura de même $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et q cycles fermés. Supposons que nous ayons h côtés de la 2^e sorte et par conséquent h cycles ouverts qui seront communs à R_0 et à R'_0 .

Reprenons la formule:

$$F + S - A = 2 - 2p.$$

Nous aurons $F = 2$, car nous avons deux polygones R_0 et R'_0 ; nous aurons $A = 2n + h$, car nous avons n paires de côtés de la 1^{ère} sorte provenant de R_0 , n paires de côtés de la 1^{ère} sorte provenant de R'_0 et h côtés de la 2^e sorte; enfin on aura $S = 2q + h$, puisque nous avons en tout $2q$ cycles fermés et h cycles ouverts.

Il vient donc:

$$p = n - q.$$

Supposons par exemple que R_0 soit de la 3^e famille, c'est à dire que tous ses sommets soient de la 3^e catégorie. On a alors:

$$q = 0 \qquad p = n.$$

Ainsi dans l'exemple V du § 5, le genre est égal à 2. Comme second exemple, je prends un polygone R_0 dont la distribution des côtés est donnée par la formule suivante:

$$(15, 24; 3)$$

ou plus généralement:

$$(1.2n + 1, \quad 2.2n, \quad 3.2n - 1, \dots, n.n + 2; n + 1)$$

de telle sorte que le $n + 1$ ^e côté soit seul de la 2^e sorte et que les côtés d'ordre m et $2n + 2 - m$ soient conjugués.

On aura dans ce cas:

$$q = n$$

d'où

$$p = 0.$$

§ 9. Simplification du Polygone Générateur.

Nous avons vu au commencement du § 5 que les régions R_0 ne sont pas complètement définies par cette condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point z donné. Nous avons ensuite imposé à ces régions une condition de plus, celle de se réduire à des polygones curvilignes ayant pour côtés des arcs de cercle et des segments de X . Mais les régions R_0 (ou *polygones générateurs*) ne sont pas encore par là complètement déterminées. En effet nous avons vu qu'on pouvait ajouter à R_0 une région quelconque S_0 à la condition d'en retrancher une région S_p transformée de S_0 par une des substitutions du groupe fuchsien, et que la région ainsi obtenue $R_0 + S_0 - S_p$ pouvait servir de la même façon que R_0 à engendrer ce groupe. Si les régions R_0 , S_0 et S_p sont contiguës et si elles se réduisent toutes trois à des polygones normaux, c'est à dire dont les côtés sont des segments de X ou des arcs de cercle ayant leurs centres sur X , la région résultante $R_0 + S_0 - S_p$ est également un polygone normal. Il suit de là qu'un même groupe fuchsien peut être engendré par une infinité de polygones générateurs R_0 et qu'on peut profiter de cette indétermination pour simplifier ce polygone.

Voici comment peut s'effectuer une pareille simplification. Joignons deux points A et B du périmètre de R_0 par un arc de cercle ayant son centre sur X , de façon à diviser ce polygone en deux autres S_0 et T_0 ; considérons deux côtés conjugués CD et EF de R_0 et supposons que CD appartienne tout entier au périmètre de S_0 et EF à celui de T_0 . Soit R_1 le polygone qui est limitrophe de R_0 le long de EF et supposons-le décomposé en deux polygones S_1 et T_1 respectivement congruents à S_0 et T_0 . Le polygone $R'_0 = S_1 + T_0$ pourra servir, aussi bien que R_0 , de polygone générateur pour le groupe fuchsien G . Il peut se faire que la considération de R'_0 soit plus avantageuse que celle de R_0 , ou bien encore qu'en faisant sur R'_0 une opération analogue à celle qu'on vient de faire sur R_0 , on arrive à un polygone R''_0 plus simple que les deux autres.

Dans chaque cas particulier, on se laissera guider par les circonstances du problème, aussi ne veux-je pas insister plus longuement sur ce point. Je me bornerai à quelques exemples, en reprenant les notations du § 7.

1° Un polygone R_0 du système (16, 23, 45) peut toujours être ramené à un polygone du système (16, 25, 34).

2° Un polygone du système (12, 34, 56, 78) peut toujours être ramené à un polygone du système (18, 27, 36, 45).

3° Un octogone du système (13, 24, 57, 68) peut toujours être ramené à un octogone du système (15, 26, 37, 48).

Quelles sont, dans cette transformation des polygones curvilignes R_0 , les propriétés de ce polygone qui demeurent invariables?

1° La famille du polygone R_0 ne change pas, sauf une exception dont je parlerai plus loin.

2° Son genre ne change pas non plus.

3° Le nombre des cycles fermés de la 3^e sous-catégorie ne varie pas.

4° Il en est de même du nombre des cycles fermés de la 4^{ème} sous-catégorie.

5° Le nombre des cycles fermés de la 2^e sous-catégorie ne varie pas non plus. On a vu que la somme des angles correspondants aux divers sommets d'un pareil cycle était égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier supérieur à l'unité. La valeur de ce nombre p demeure également invariable.

6° On peut au contraire en général augmenter ou diminuer à volonté le nombre des cycles fermés de la 1^{ère} sous-catégorie qui sont tels que la somme des angles qui correspondent à tous les sommets du cycle est égale à 2π .

§ 10. Isomorphisme.

Nous avons vu au commencement du § 3 qu'un groupe fuchsien H est isomorphe à un autre groupe fuchsien G si le nombre des substitutions fondamentales est le même et si de plus toutes les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions de G , subsistent entre celles de H . Pour reconnaître l'isomorphisme de deux groupes donnés, nous sommes donc amenés à chercher les relations de la forme [(6) § 3] qui existent entre les substitutions d'un groupe donné et en particulier les *relations fondamentales* dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Nous avons vu au § 3 qu'on obtenait les relations de la forme (6) de la manière suivante: on décrit à partir d'un point A intérieur à R_0

un contour fermé quelconque AMA ne sortant pas de la région du plan située au dessus de X . Supposons que ce contour traverse successivement des régions $R_0, R_{\alpha_1}, R_{\beta_2} \dots R_{\beta_{y-1}}$ et enfin une région R_{β_y} se confondant avec R_0 , qu'il passe de la région $R_{\beta_{x-1}}$ dans la région R_{β_x} en franchissant un côté de $R_{\beta_{x-1}}$ qui est l'homologue de celui des côtés de R_0 qui sert de frontière commune à cette région et à R_{α_x} . Nous pourrons écrire la relation identique:

$$z = f_{a_1} [f_{a_2} (f_{a_3} \dots (f_{a_y}(z)) \dots)]$$

qui est de la forme (6) et on obtiendra de la sorte toutes les relations de cette forme. Mais si on ne veut écrire que les relations fondamentales, il ne sera pas nécessaire de décrire tous les contours AMA possibles; on se bornera aux contours infiniment petits qui enveloppent les sommets de R_0 . Envisageons donc successivement les divers sommets de R_0 et décrivons autour de chacun d'eux un contour infinitésimal. Comme ce contour AMA ne devra pas sortir de la partie du plan située au dessus de X , on ne pourra décrire de semblable contour autour des sommets de R_0 qui sont situés sur cet axe X lui-même. Les seuls sommets du polygone R_0 que nous ayons à envisager sont donc des sommets de la 1^{ère} catégorie.

Je suppose que les différents côtés de R_0 soient numérotés de telle sorte qu'en suivant dans un sens convenable le périmètre de ce polygone on rencontre successivement les côtés $C_1, C_2, C_3, \dots C_q$; q étant le nombre total des côtés; A_1 sera le sommet situé entre C_q et C_1 ; A_2 le sommet situé entre C_1 et C_2 ; etc. En général A_i sera le sommet situé entre C_{i-1} et C_i . Si C_i est de la 1^{ère} sorte, la région limitrophe de R_0 le long de C_i s'appellera R_i et la substitution fondamentale correspondante sera:

$$[z, f_i(z)].$$

Considérons l'un quelconque des sommets de la 1^{ère} catégorie que j'appelle A_{a_1} . Ce sommet fera partie d'un certain cycle de la 1^{ère} catégorie; on trouvera les autres sommets de ce cycle en appliquant la règle du § 5. Supposons que cette règle donne successivement les sommets:

$$A_{a_1}, A_{a_2} \dots A_{a_p}$$

et précisément dans cet ordre. Supposons que la somme des angles corre-

spondants à ces sommets soit $\frac{2\lambda}{\lambda}$, λ sera un nombre entier. Posons pour abréger :

$$\begin{aligned} F(z) &= f_{a_1} [f_{a_2} [f_{a_3} \dots [f_{a_p}(z)] \dots]] \\ F[F(z)] &= F^2(z) & F[F^2(z)] &= F^3(z) \dots \\ F[F^{\lambda-1}(z)] &= F^\lambda(z). \end{aligned}$$

La relation fondamentale à laquelle conduira, d'après la règle exposée plus haut, un contour infinitésimal décrit autour de A_{a_1} sera :

$$z = F^\lambda(z).$$

Les sommets $A_{a_2}, A_{a_3} \dots A_{a_p}$ qui appartiennent au même cycle que A_{a_1} conduisent à la même relation. Donc :

Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G , est précisément celui des cycles de la 1^{ère} catégorie du polygone R_0 correspondant.

Or les polygones des 2^e, 3^e et 4^e familles n'admettent pas de cycle de cette catégorie. Donc il n'y a aucune relation fondamentale entre les substitutions des groupes de ces familles, et les relations de la forme (6) que l'on pourrait trouver entre ces substitutions se réduisent toutes à des identités.

Voici une première conséquence que l'on peut tirer de ce fait : *tout groupe H dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien G de la 2^e, de la 3^e ou de la 4^e familles, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales.* En effet la première condition de l'isomorphisme qui exige que le nombre des substitutions fondamentales soit le même est remplie, et la seconde qui exige que toute relation entre les substitutions de G subsiste entre celles de H est satisfaite d'elle-même puisqu'il n'existe pas de pareille relation. Seulement une distinction est à faire. S'il y a des relations de la forme (6) entre les substitutions de H , G n'est pas isomorphe à H et par conséquent l'isomorphisme est méridrique. Si au contraire il n'y a pas de semblable relation, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent holoédrique. Il en résulte que *deux groupes fuchiens de la 2^e, de la 3^e ou de la 4^{me} familles sont holoédriquement isomorphes pourvu que le nombre des substitutions fondamentales soit le même, c'est à dire pourvu que les deux polygones R_0 correspondants aient un même nombre de côtés de la 1^{ère} sorte.*

Considérons maintenant deux polygones R_0 et R'_0 quelconques, mais dont les côtés de la 1^{ère} et de la 2^e sorte soient distribués de la même manière, de telle sorte qu'ils soient désignés par la même formule, si on emploie la notation exposée au commencement du § 7. Ces deux polygones appartiendront évidemment au même genre et à la même famille et le nombre de cycles, formés par les sommets des deux polygones, est le même, de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement. D'ailleurs, à un cycle fermé du premier polygone, correspondra dans le second polygone un cycle également fermé. Si de plus la somme des angles de chaque cycle fermé de R_0 est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0 , les deux groupes fuchsien engendrés par ces deux polygones seront holoédriquement isomorphes.

§ 11. Formation effective des Groupes Fuchsien.

Un groupe fuchsien est complètement déterminé quand on connaît ses substitutions fondamentales, qu'il suffit de combiner de toutes les manières possibles pour obtenir toutes les substitutions du groupe. Former un groupe fuchsien, c'est donc calculer les coefficients de ses substitutions fondamentales. Ce problème ne présente aucune difficulté. Supposons en effet que l'on ait construit le polygone R_0 correspondant au groupe à former et que l'on ait calculé les coordonnées et par conséquent les affixes de tous ses sommets. Les substitutions fondamentales cherchées sont celles qui changent chaque côté de la 1^{ère} sorte en son conjugué. Soit donc α, β et γ, δ les affixes des sommets de deux côtés conjugués de R_0 . Supposons d'abord que les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient toutes quatre imaginaires, de telle façon qu'aucun de ces sommets ne soit situé sur X . On devra avoir en appelant $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les quantités imaginaires conjuguées de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

c'est à dire

$$(1) \quad \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}.$$

La substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est alors parfaitement déterminée; pour l'écrire en mettant en évidence la réalité des coefficients, je poserai:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta &= \beta_1 + i\beta_2 & \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2 & \delta &= \delta_1 + i\delta_2 \\ \alpha' &= \alpha_1 - i\alpha_2 & \beta' &= \beta_1 - i\beta_2 & \gamma' &= \gamma_1 - i\gamma_2 & \delta' &= \delta_1 - i\delta_2. \end{aligned}$$

La substitution cherchée s'écrira alors:

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right)$$

où:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} & B &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix} & D &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1 \delta_2 + \beta_2 \delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Mais on peut faire encore deux hypothèses; supposons que α et γ soient réels tandis que β et δ restent imaginaires; la condition (1) n'a plus alors de raison d'être; la substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est encore parfaitement déterminée et elle s'écrit

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right);$$

les coefficients A, B, C, D ont la même expression que plus haut, mais il faut remarquer que α_2 et γ_2 sont nuls.

Supposons maintenant que les quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient réelles, la substitution qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ ne sera plus déterminée. Dans l'expression de ses coefficients entrera un paramètre arbitraire h . Elle s'écrira

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D} \right)$$

et les coefficients A, B, C, D auront pour expression:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} & B &= \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ C &= \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & D &= \begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les quantités réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour pouvoir être les sommets d'un polygone R_0 sont assujetties à l'inégalité:

$$\left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\gamma - \alpha} \right] \left[\frac{1}{\delta - \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} \right] < 0.$$

Quant à h , c'est un paramètre arbitraire qui est supposé réel et assujetti à l'inégalité:

$$(\gamma + h)(\delta + h)(\delta - \gamma)(\beta - \alpha) > 0.$$

Ainsi quand on connaît les affixes des sommets de R_0 qui exprime que le déterminant $AD-BC$ est positif, on peut calculer les coefficients des substitutions fondamentales de G . Il s'agit donc de choisir ces affixes de telle façon que le polygone R_0 satisfasse aux conditions du § 6 qui sont nécessaires pour qu'il donne naissance à un groupe fuchsien. C'est là un problème purement algébrique et qui ne présente aucune difficulté. La grande variété des cas possibles ne me permettra pas de les examiner tous en détail ce qui m'entraînerait à des répétitions et à des longueurs inutiles. Je me bornerai donc à envisager quelques exemples.

1^{er} EXEMPLE.

Cherchons d'abord à former les groupes fuchiens de la 3^{me} famille dérivés de n substitutions fondamentales. Le polygone R_0 correspondant aura $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et $2n$ de la 2^{me}. Pour déterminer complètement un pareil polygone, il faut s'imposer arbitrairement $4n$ conditions. Mais nous avons vu au § 9 qu'un même groupe G peut être engendré par une infinité de polygones R_0 . Si l'on tient compte de cette circonstance, on reconnaîtra aisément que pour déterminer complètement le groupe de la 3^{me} famille dérivé de n substitutions fondamentales, il faut s'imposer arbitrairement $3n$ conditions. Or c'est là précisément le nombre total des coefficients de n substitutions réelles quelconques. Il ne s'en suit pas qu'il suffise de prendre au hasard n substitutions réelles pour que le groupe qui en dérive soit un groupe fuchsien de la 3^{me} famille; mais *les coefficients de ces substitutions ne seront assujettis à aucune condition d'égalité; ils devront seulement satisfaire à certaines inégalités.*

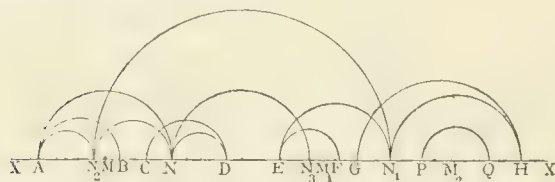
Quelles sont ces inégalités? tel est le problème qu'il nous reste à résoudre. On trouve d'abord sans peine que toutes les substitutions doivent être hyperboliques et par conséquent leurs points doubles doivent

être réels et situés sur X . On peut énoncer un résultat général au sujet de la distribution de ces points doubles sur X . En effet, considérons deux côtés conjugués ab et cd de R_0 et supposons qu'ils soient de la 1^{ère} sorte et appartiennent à la même paire. Supposons de plus pour fixer les idées que le point ∞ fasse partie de R_0 de telle façon que ce polygone soit la région du plan située au dessus de X et extérieure aux différents cercles qui forment ses côtés de la 1^{ère} sorte. Si cela n'était pas, on ferait un changement convenable de la variable. Il y aura une substitution fondamentale qui changera ab en cd et *ses deux points doubles seront situés l'un sur le segment ab de X , l'autre sur le segment cd .*

Pour pousser plus loin l'étude des inégalités qui ont lieu entre les coefficients des substitutions fondamentales d'un groupe de la 3^{me} famille, je vais prendre un exemple particulier, à savoir l'octogone de l'exemple V du § 5. La méthode que j'emploierai s'étendrait d'ailleurs au cas le plus général.

Les deux substitutions fondamentales changent AB en DC et EF en HG . Considérons d'abord la substitution S qui change AB en DC ; ses deux points doubles M et N sont situés respectivement sur les segments AB et CD de l'axe X . Décrivons un cercle sur AN comme diamètre, et envisageons le triangle curviligne ABN ; envisageons également le cercle décrit sur DN comme diamètre et le triangle curviligne DCN ; la substitution S changera le triangle ABN en DCN ; nous pouvons donc en vertu des principes du § 9 remplacer l'octogone $R_0 = ABCDEFGH$ par l'heptagone $R'_0 = ANDEFGH$. Envisageons de même la substitution S_1 qui change EF en HG et ses deux points doubles M_1 et N_1 situés l'un sur le segment EF , l'autre sur le segment GH . Par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, on verrait que l'on peut remplacer l'heptagone R'_0 par l'hexagone $R''_0 = ANDEN_1H$. Remarquons que R''_0 est de la 4^e famille et du 2^{me} ordre de cette famille, tandis que R_0 était de la 3^{me} famille. C'est là l'exception que j'avais annoncée aux principes du § 9; on peut simplifier le polygone générateur R_0 de façon à ramener un polygone de la 3^{me} à un polygone du 2^{me} ordre de la 4^{me} ou même de la 2^{me} familles; mais jamais à un polygone du 1^{er} ordre de la 4^{me} ou de la 2^{me} familles. Envisageons maintenant l'opération S_2 qui consiste à faire d'abord la substitution S , puis la substitution inverse de S_1 . La substitution S change AN en DN , et la substitution inverse de S_1 change

DN en un certain cercle PQ intérieur à $N_1 H$. La substitution S_2 change donc AN en PQ et ses deux points doubles N_2 et M_2 sont situés, l'un sur le segment AN , l'autre sur le segment PQ . La substitution S change N_2 en un certain point N_3 ; la substitution S_1 devra changer aussi N_2 en N_3 ; N_3 est donc situé sur le segment $N_1 E$. Décrivons des cercles sur $N_2 N$,



$N_2 N_1$, $N_1 N_3$, NN_3 comme diamètres; la substitution S change $N_2 N$ en $N_3 N$, $N_2 N_1$ en $N_3 N_1$ et cela nous permet en vertu des principes du § 9 de remplacer l'octogone R_0 par le quadrilatère $R_0''' = N_1 N_2 N N_3$.

Ce quadrilatère est de la 2^{me} famille et du 2^{me} ordre de cette famille.

Nous allons maintenant pouvoir trouver les inégalités qui ont lieu entre les coefficients de S et de S_1 ; on peut toujours supposer que les points doubles de S_1 sont 0 et ∞ de telle sorte que

$$N_1 = 0 \quad M_1 = \infty$$

car si cette condition n'était pas remplie, il suffirait d'un changement très simple de variable pour être ramené au cas où l'on a $N_1 = 0$, $M_1 = \infty$.

Les deux substitutions s'écrivent alors:

$$S = \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad S_1 = (z, Kz).$$

K est essentiellement positif et plus grand que 1. De plus on peut toujours supposer que c est positif sans quoi on changerait tous les signes des quatre quantités a , b , c , d . Les points M et N sont les points doubles de S et par conséquent les racines de l'équation:

$$(1) \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Les points M_2 et N_2 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az + b}{K(cz + d)} \right)$$

ou les racines de l'équation:

$$(2) \quad cz^2 + \left(d - \frac{a}{K} \right)z - \frac{b}{K} = 0.$$

Le point N_3 et un autre point M_3 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az + bK}{cz + dK} \right)$$

et les racines de l'équation:

$$(3) \quad cz^2 + (dK - a)z - bK = 0.$$

L'inspection de la figure montre que les quantités M, N, M_2, N_2, M_3, N_3 sont toutes réelles et de même signe; positives par exemple; d'où les relations:

$$\begin{array}{lll} b < 0 & (d - a)^2 + 4bc > 0 & a > d \\ \frac{b}{K} < 0 & (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 & a > dK \\ bK < 0 & (dK - a)^2 + 4Kbc > 0 & a > dK \end{array}$$

qui se réduisent à:

$$\begin{array}{llll} b < 0 & a > dK & (a + d)^2 > 4 & a > d \\ & & \left(\frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} \right)^2 > 4 & \end{array}$$

en tenant compte de

$$ad - bc = 1.$$

Exprimons maintenant que M_2 et N_2 sont plus petits et que M_3 et N_3 sont plus grands que M et N . On trouve ainsi les conditions:

$$\begin{array}{lll} b < 0 & a^2 + bc > 1 > d^2 + bc \\ b < 0 & \frac{a^2}{K} + bc < 1 < d^2 K + bc & a - dK > a - d > \frac{a}{K} - d. \end{array}$$

Toutes ces conditions se réduisent aux suivantes:

$$\begin{array}{llll} a > 0 & b < 0 & d < 0 & a + d > 2 \\ & & & \frac{a}{\sqrt{K}} + d\sqrt{K} < -2 \end{array}$$

Cette méthode s'applique à tous les groupes fuchsien de la 3^{me} famille. On peut toujours par ce procédé ramener le polygone R_0 à un polygone du 2^e ordre de la 2^{me} famille. Les sommets de ce nouveau polygone seront connus car ce seront les points doubles des substitutions fondamentales ou de quelques-unes de leurs combinaisons. Pour trouver les inégalités cherchées, il suffit d'exprimer que ces sommets sont disposés d'une certaine manière.

2^{me} EXEMPLE.

Nous prendrons pour deuxième exemple les groupes de la 1^{ère} famille et du genre 0 et, pour particulariser encore, nous choisirons l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7.

Nous avons ici trois substitutions fondamentales:

S_1 qui change AB en AF

S_2 qui change BC en FE

S_3 qui change CD en ED .

Nous envisagerons en outre:

S_4 combinaison de S_2 et de S_1 pris en sens contraire

S_5 combinaison de S_3 et de S_2 pris en sens contraire.

On peut considérer le groupe comme dérivé de S_1 , S_4 et S_5 .

Soient a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D ; a', b', c', d' leurs quantités imaginaires conjuguées; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les angles $A, B + F, C + E, D$ qui sont des parties aliquotes de 2π . Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 s'écriront:

$$\begin{pmatrix} z - a & e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - a'} \\ z - a' & \frac{z - a}{z - a'} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} z - b & e^{i\beta} \frac{z - b}{z - b'} \\ z - b' & \frac{z - b}{z - b'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z - c & e^{i\gamma} \frac{z - c}{z - c'} \\ z - c' & \frac{z - c}{z - c'} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} z - d & e^{i\delta} \frac{z - d}{z - d'} \\ z - d' & \frac{z - d}{z - d'} \end{pmatrix}.$$

Exprimons que la combinaison des quatre substitutions S_3, S_5, S_4, S_1 faites successivement équivaut à la substitution identique (z, z) ; nous arriverons à trois relations entre $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Supposons ces relations satisfaites. Suffiront-elles pour que le groupe dérivé des substitutions S_1, S_5, S_4 soit discontinu? Non, il faudra encore que les points A, B, C, D puissent former quatre sommets d'un hexagone $ABCDEF$ où les angles:

$$A = \alpha \quad B + F = \beta \quad C + E = \gamma \quad D = \delta.$$

Considérons les angles curvilignes du quadrilatère $ABCD$ obtenu en joignant les quatre points A, B, C, D par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X . Il faut que les quatre angles A, B, C, D de ce quadrilatère soient respectivement plus petits que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; d'où les inégalités:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 0 < \arg. \frac{d-a}{d'-a'} \frac{b'-a'}{b-a} < \alpha \\
 & 0 < \arg. \frac{a-b}{a'-b'} \frac{c'-b'}{c-b} < \beta \\
 & 0 < \arg. \frac{b-c}{b'-c'} \frac{d'-c'}{d-c} < \gamma \\
 & 0 < \arg. \frac{c-d}{c'-d'} \frac{a'-d'}{a-d} < \delta.
 \end{aligned}$$

Comment reconnaitrons-nous maintenant si trois substitutions données S_1 , S_4 , S_5 peuvent être considérées comme les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien analogue à celui qui nous occupe. On formera la substitution S_3 , combinaison de la substitution inverse de S_1 , de l'inverse de S_4 , et de l'inverse de S_5 faites successivement. On calculera les points doubles $a, a'; b, b'; c, c'; d, d'$ de ces quatre substitutions et leurs multiplicateurs $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$. Deux conditions devront être remplies: 1° $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devront être parties aliquotes de 2π ; 2° les quantités $a, a', b, b', c, c', d, d', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ devront satisfaire aux inégalités (2).

3° EXEMPLE.

Nous prendrons pour troisième exemple les groupes de la 2^e famille, du 1^{er} ordre et du genre 0; et parmi ces groupes, nous choisirons encore celui qui est engendré par l'hexagone $R_0 = ABCDEF$ considéré dans l'exemple II du § 7. Seulement ici cet hexagone devant être de la 2^e famille, tous ses sommets seront sur X . Nous envisagerons, comme dans l'exemple précédent, les substitutions:

- S_1 qui change AB en AF
- S_2 qui change BC en FE
- S_3 qui change DC en DE
- S_4 combinaison de S_2 et de l'inverse de S_1
- S_5 combinaison de S_3 et de l'inverse de S_2 .

Soient a, b, c, d, e, f les affixes des sommets de R_0 ; ces quantités seront essentiellement réelles. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 devront être paraboliques puisque le groupe est supposé du 1^{er} ordre, et elles s'écriront:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a} \right) \\
S_4 &= \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b} \right) \\
S_5 &= \left(\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c} \right) \\
S_3 &= \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right)
\end{aligned}$$

où h et k sont deux quantités définies par les équations

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e-a} &= \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a} \\
\frac{1}{f-d} &= \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}
\end{aligned}$$

Quelles sont maintenant les conditions pour que les trois substitutions S_1 , S_4 , S_5 donnent naissance à un groupe fuchsien? Il faut que les six quantités a, b, c, d, e, f se succèdent précisément dans cet ordre circulaire, ou bien dans l'ordre inverse de sorte qu'on doit avoir:

$$(3) \quad \frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a}$$

ou bien

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Exprimons maintenant que la combinaison des substitutions S_3, S_5, S_4, S_1 équivaut à la substitution identique, il viendra:

$$(4) \quad (b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(a-f).$$

REMARQUE.

Dans les deux exemples qui précèdent, il est peut-être avantageux d'envisager, non l'hexagone $ABCDEF$ de l'exemple II du § 7, qui serait noté (16, 25, 34), mais l'hexagone noté (12, 34, 56) qui lui est équivalent d'après ce qu'on a vu au § 9.

Soit $ABCDEF$ cet hexagone, les côtés AB et BC , CD et DE , EF et FA seront conjugués. Envisageons les substitutions:

- S_1 qui change BA en BC
 S_2 qui change DC en DE
 S_3 qui change FE en FA
 S_4 combinaison de S_1 , S_2 et S_3 .

Ces quatre substitutions seront elliptiques et leurs multiplicateurs seront $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$; α , β , γ , δ étant des parties aliquotes de 2π .

B sera l'un des points doubles de S_1 , D l'un des points doubles de S_2 , F l'un des points doubles de S_3 , A l'un des points doubles de S_4 ; quant aux autres points doubles de ces substitutions, ce seront respectivement les quantités imaginaires conjuguées de B , D , F , A ; C sera le transformé de A par S_1 , E celui de C par S_2 . Pour que le groupe dérivé de S_1 , S_2 , S_3 soit discontinu, il suffit que l'hexagone curviligne normal $ABCDEF$ soit convexe; d'où les conditions:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \arg. \frac{d-b}{d'-b'} \frac{f'-b'}{f-b} < \alpha \\
 & \arg. \frac{f-d}{f'-d'} \frac{b'-d'}{b-d} < \beta \\
 & \arg. \frac{b-f}{b'-f'} \frac{d'-f'}{d-f} < \gamma.
 \end{aligned}$$

Pour reconnaître si le groupe dérivé de S_1 , S_2 , S_3 est discontinu, on calculera les points doubles a , a' , b , b' , c , c' , d , d' , et les multiplicateurs $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$ de S_1 , S_2 , S_3 et de leur combinaison S_4 et on recherchera si ces quantités satisfont aux inégalités (5) et si α , β , γ , δ sont des parties aliquotes de 2π .

Supposons maintenant que l'hexagone $abcdef$ ne soit plus de la 1^{ère}, mais de la 2^e famille et du 1^{er} ordre de cette famille, de telle façon que les quantités $abcdef$ soient réelles. Ces quantités devront satisfaire aux inégalités (3), pour que l'hexagone $abcdef$ soit convexe. Les substitutions S_1 , S_2 , S_3 s'écriront:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b} \right) \\
 S_2 &= \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d} \right) \\
 S_3 &= \left(\frac{1}{z-f}, \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f} \right).
 \end{aligned}$$

Si nous exprimons que la combinaison S_4 de S_1 , S_2 , S_3 est une substitution parabolique, nous trouverons que les quantités $abcdef$ satisfont

à l'égalité (4). Cette égalité jointe aux inégalités (3) est la condition pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu.

4^e EXEMPLE.

Comme 4^e exemple nous prendrons un quadrilatère $abcd$, dont les côtés opposés ab, cd et bc, da sont conjugués; les quatre sommets forment un seul cycle et la somme des angles Σ est une partie aliquote de 2π . Ce quadrilatère engendre un groupe de la 1^{ère} famille et du genre 1. Joignons deux sommets opposés bd par un arc de cercle ayant son centre sur X . Nous obtiendrons ainsi un triangle abd sur les côtés duquel nous marquerons trois points α, β, γ , le premier sur bd , le second sur da , le troisième sur ab et de telle façon que:

$$(b, a) = (a, d) \quad (d, \beta) = (\beta, a) \quad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Il existera alors une substitution S_1 qui change ab en ad , une autre S_2 qui change βd en βa et une autre S_3 qui change γa en γb ; toutes trois auront pour multiplicateur -1 . Le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 sera discontinu et aura pour polygone générateur l'hexagone $b\alpha d\beta a\gamma$ dont les côtés $b\alpha, \alpha d; d\beta, \beta a; a\gamma, \gamma b$ sont conjugués et situés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est donc un cas particulier des groupes engendrés par un hexagone $abcdef$ et étudiés dans la remarque relative à l'exemple précédent.

Les substitutions fondamentales du groupe engendré par le quadrilatère $abcd$, sont S_b qui change ab en dc et S_c qui change bc en ad , et il est aisé de voir que S_b est la combinaison de S_3 et de S_1 ; S_c est la combinaison de S_2 et de S_1 ; d'où la règle suivante pour former tous les groupes fuchsien dérivés d'un quadrilatère tel que $abcd$:

On prendra trois substitutions S_1, S_2, S_3 de multiplicateur -1 et satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque relative à l'exemple précédent; on combinera S_3 et S_1 , ainsi que S_2 et S_1 et on aura les substitutions fondamentales du groupe cherché.

§ 12. Généralisation.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les substitutions étaient réelles; mais une première généralisation peut être faite immédiatement.

Soit

$$(1) \quad \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

une substitution réelle quelconque; et faisons-lui correspondre la substitution:

$$(2) \quad \left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{a \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \frac{az + b}{cz + d} + \delta} \right)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes imaginaires quelconques. Supposons que nous donnions à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des valeurs fixes et que l'on fasse parcourir aux quatre quantités a, b, c, d toutes les valeurs réelles telles que $ad - bc = 1$. Il est clair que les substitutions (2) formeront un groupe; et ce groupe jouira des propriétés suivantes:

1° Ses substitutions n'altéreront pas le cercle dont l'équation est:

$$\text{partie imaginaire de } \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta} = 0$$

et que j'appellerai cercle fondamental.

2° Le transformé d'un point z par une des substitutions (2) sera intérieur ou extérieur au cercle fondamental selon que le point z sera lui-même intérieur ou extérieur à ce cercle.

Nous supposons par exemple que si z est au-dessus de X , le point $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ sera intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que l'on égale successivement les coefficients de (1) à ceux des diverses substitutions d'un groupe fuchsien G . On obtiendra ainsi une infinité de substitutions (2) qui formeront un groupe G' , et ce groupe sera évidemment discontinu. À ce groupe G correspondra une décomposition de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux R_0, R_1, \dots, R_i tous congruents entre eux. Supposons que z parcoure l'un de ces polygones R_i dont les côtés sont on l'a vu, ou bien des segments de X ou bien des arcs de cercle ayant leurs centres sur X ; le point $\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}$ parcourra de son côté un certain polygone S_i dont les côtés seront, ou bien des arcs du cercle fondamental, ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Ainsi de même qu'au groupe G correspondait une division de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones nor-

maux congruents; de même au groupe G' correspondra une division de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux congruents, à la condition d'adopter les dénominations suivantes:

Un polygone normal est un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs du cercle fondamental ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Deux figures seront congruentes si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution telle que (2), c'est-à-dire par une substitution qui conserve le cercle fondamental. Tout ce qu'on a dit de la distribution des côtés en paires et des sommets en cycles, et de la classification des polygones normaux en familles, en ordres et en genres, reste vrai comme dans le cas particulier auquel nous nous étions restreints jusqu'ici.

Quelles seront maintenant les conditions pour qu'un polygone normal donne naissance à un groupe discontinu G' ? Ce seront les mêmes conditions que nous avons trouvées dans le cas particulier des groupes de substitutions réelles, mais l'énoncé de ces conditions doit être convenablement modifié.

1° La somme des angles des divers sommets correspondants à un même cycle doit être une partie aliquote de 2π .

2° Si ab et cd sont deux côtés conjugués; on devra avoir comme dans le cas des substitutions réelles:

$$\frac{a-b}{a-\bar{b}} \frac{a'-b'}{a'-\bar{b}'} = \frac{c-d}{c-\bar{d}} \frac{c'-d'}{c'-\bar{d}'};$$

mais a' , b' , c' , d' ne désigneront plus les quantités imaginaires conjuguées de a , b , c , d , mais les symétriques de a , b , c , d par rapport au cercle fondamental (voir la définition du § 7). En d'autres termes si α est le centre du cercle fondamental et ρ son rayon:

$$a' = \alpha + \text{imaginaire conjuguée de } \frac{\rho^2}{a - \bar{\alpha}}$$

et de même pour b' , c' , d' .

Nous appellerons groupes fuchsien les groupes discontinus tels que G' ; car ils ne diffèrent pas essentiellement des groupes de substitutions réelles et nous réserverons le nom de groupes Kleinéens à ceux des groupes dont les substitutions ne conservent pas un même cercle fondamental. Nous ferons de ces groupes l'objet d'un mémoire spécial.

Les particularités qui peuvent se présenter sont les mêmes que pour les groupes correspondants de substitutions réelles;

Si le polygone générateur R_0 est du 2^a ordre de la 2^e, de la 4^e, de la 6^e ou de la 7^e familles, l'ensemble des polygones R_i ne recouvrira pas tout l'intérieur du cercle fondamental mais l'intérieur d'un certain domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement ce cercle.

Si le polygone R_0 est de la 3^e, de la 4^e, de la 5^e ou de la 7^e familles, il a des côtés de la 2^e sorte. Nous avons vu au commencement du § 8 que dans ce cas il y a avantage à adjoindre à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport à X ; de telle façon que le plan tout entier se trouve divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$ limitées par une ou plusieurs périphéries séparées. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous adjoindrons à chaque polygone R_i son symétrique R'_i par rapport au cercle fondamental, de telle façon que le plan tout entier va se trouver encore divisé en une infinité de régions $R_i + R'_i$.

Laissons de côté pour le moment les régions que nous venons d'appeler R'_i et ne nous occupons que des polygones R_i eux-mêmes. La somme des surfaces de ces polygones, tous intérieurs au cercle fondamental, sera *finie*, ce qui est très important au point de vue des applications ultérieures. Il y aurait exception lorsque le cercle fondamental se réduit à une droite ce qui arrive en particulier dans le cas des groupes de substitutions réelles; mais comme on l'a vu au commencement de ce paragraphe, un changement linéaire de variable suffirait pour ramener au cas général.

Dans mes travaux ultérieurs, je supposerai pour fixer les idées que le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si l'on n'était pas placé dans ce cas, un changement très-simple de variable y ramènerait aisément.

§ 13. Historique.

Le premier exemple de groupe discontinu formé de substitutions linéaires est celui que l'on rencontre en étudiant le module k d'une fonction elliptique (notation habituelle) ou le module J (notation de M. Klein) considérés comme fonctions du rapport des périodes. M. Hermite a fait une étude approfondie de cette sorte de transcendante et, en montrant qu'elle était uniforme, il faisait voir du même coup que le groupe correspondant était discontinu.

Les fonctions k et J ont été dans la suite, ainsi que le groupe dis-

continu correspondant, étudiées par MM. Dedekind, Fuchs et Klein et plus récemment par M. Hurwitz. Nous citerons en particulier les importants travaux de M. Klein que l'on trouve dans les *Mathematische Annalen* et un remarquable mémoire de M. Fuchs inséré au Tome 83 du Journal de Crelle.

Il est évident qu'un groupe quelconque G en contient une infinité d'autres qui seront tous discontinus, si le groupe G l'est lui-même; de sorte que la connaissance d'un seul groupe discontinu permet d'en former très-aisément une infinité d'autres. C'est cette remarque qui est le point de départ des belles recherches de M. Klein sur la transformation des fonctions elliptiques et sur les fonctions modulaires en général.

Outre ces groupes contenus dans le groupe modulaire dont la discontinuité était évidente, il y a encore un autre groupe dont la discontinuité avait été remarquée par M. Schwarz dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Crelle; c'est l'exemple I du § 7. C'était la première fois qu'on arrivait à un pareil résultat sans prendre pour point de départ la théorie des fonctions elliptiques. Enfin M. Fuchs reprit une question analogue dans des travaux insérés au Tome 89 du Journal de Crelle et dans les Actes de la Société de Göttingen. Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsien et d'en donner une démonstration rigoureuse.

Je l'ai donnée d'abord dans un mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques du 1^{er} Juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux Comptes Rendus de l'année 1881.

Le mode de représentation que j'ai employé, c'est à dire la division d'une portion du plan en une infinité de polygones curvilignes, peut être très utile pour l'étude des propriétés générales d'un groupe; c'est ce que j'ai cherché à faire voir. Aux géomètres qui désireraient poursuivre dans cet ordre d'idées l'étude d'un groupe fuchsien ou de tout autre groupe, je recommanderai la lecture de l'*Habilitationschrift* de M. Walther Dyck de l'université de Leipzig, qui emploie un mode de représentation analogue et en fait ressortir les nombreux avantages.

ZUR THEORIE DER LEIBRENTEN.

VON

C. J. MALMSTEN.

Bezeichnungen.

- (1) $W(x_k; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, welche gegenwärtig das Alter x_k hat, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre noch lebt.
- (2) $W(x_1, x_2, \dots, x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre *alle* noch leben.

Hier und überhaupt im Folgenden wird vorausgesetzt, dass für alle Personen eine und dieselbe Lebenstabelle gilt.

- (3) ${}^vW(x_1, x_2, \dots, x_n; i)$: die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen, welche gegenwärtig respective das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, am Ende des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre wenigstens v Personen noch leben.
- (4) $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem n bestimmte Personen, die gegenwärtig respective das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, *alle* noch leben.

- (5) $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$: der gegenwärtige Werth einer Lebensrente, die mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, wenigstens v Personen noch leben.

§ 1.

In der Darstellung des Gegenstandes dieses Aufsatzes werden wir einen Lehrsatz benutzen, auf den wir, um nachher nicht die Reihenfolge in der Entwicklung zu unterbrechen, gleich zu Anfang die Aufmerksamkeit lenken wollen. Dieser Satz lautet so:

Es möge $W(i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass ein gewisser Zustand bis zum Schluss des i^{ten} Jahres stattfindet; ferner mögen

$$(6) \quad w_1(i), w_2(i), w_3(i), \dots \text{etc.}$$

die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, dass gewisse andere beziehungsweise Zustände bis zum Schluss desselben i^{ten} Jahres stattfinden; endlich mögen

$$P, P_1, P_2, P_3, \dots \text{etc.}$$

die gegenwärtigen Werthe von den Jahresrenten bezeichnen, welche jede mit 1 Mark an jedem solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden sollen, an welchem die resp. Zustände noch stattfinden, die den zu Eingang dieses Satzes und unter (6) genannten Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Ist nun

$$(7) \quad W(i) = a_1 w_1(i) + a_2 w_2(i) + a_3 w_3(i) + \dots \text{etc.}$$

so ist auch

$$(8) \quad P = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \dots \text{etc.}$$

Der Beweis folgt daraus, dass nach der Definition einer Jahresrente allgemein die Formel

$$P_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_k(i)}{r^i}, \quad \left[r = 1 + \frac{\text{Procentzahl}}{100} \right]$$

gilt, mit deren Anwendung man die Gleichung (8) aus (7) unmittelbar erhält.

§ 2.

Für alle Lebensrenten- und Lebensversicherungs-Fragen, bei welchen das Leben nur eines Einzigen in Betracht kommt, ist es der Werth der *einfachen Lebensrente*, der vor Allem als bekannt vorausgesetzt wird; und die Lösung eines dahingehörenden Problems wird als gefunden betrachtet, wenn man einen Ausdruck hergestellt hat, der neben andern bekannten Grössen nur die einfache Lebensrente enthält.

Dieselbe Rolle, welche die einfache Lebensrente einnimmt, wenn es sich um ein einzelnes Leben handelt, behauptet nun die (unter 4 der Bezeichnungen definirte) Function $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ bei den auf verbundene oder combinirte Leben sich beziehenden Fragen.

Auch hier wird eine Lösung als gefunden betrachtet, sobald man einen Ausdruck aufgestellt hat, welcher allein Lebensrenten von der Art wie $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ enthält.

Das Problem, mit dessen Lösung wir uns hier in dieser kleinen Abhandlung beschäftigen werden, ist von einer so umfassenden Allgemeinheit, dass darin die Lösung einer grossen Menge von Fragen inclusive liegt, welche die Lebensrenten für combinirte Leben betreffen.

Dies Problem ist das folgende:

Den Werth von

$${}^vP(x_1, x_2, \dots x_n)$$

zu bestimmen, nemlich (wie in Nr 5 der Bezeichnungen) den gegenwärtigen Werth von einer Lebensrente, welche mit 1 Mark an einem jeden solchen Jahresschlusse ausbezahlt werden soll, an welchem von n bestimmten Personen, die gegenwärtig respective das Alter $x_1, x_2, \dots x_n$ haben, wenigstens v Personen noch leben.

§ 3.

Wir werden nun zuerst (Nr 3)

$${}^vW(x_1, x_2, \dots, x_n; i)$$

zu bestimmen suchen, nemlich die Wahrscheinlichkeit, dass von n bestimmten Personen, welche gegenwärtig das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, am Schlusse des i^{ten} der von jetzt an gezählten Jahre, wenigstens v Personen noch leben.

Offenbar ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

der Wahrscheinlichkeit dass		n	Personen leben und			0	todt ist	
+	d:o	»	$n - 1$	»	»	1	»	»
+	d:o	»	$n - 2$	»	»	2	»	sind
.
+	d:o	»	k	»	»	$n - k$	»	»
.
+	d:o	»	v	»	»	$n - v$	»	»

Mit Hülfe der Bezeichnungen (1) wird nun die Wahrscheinlichkeit, dass gerade diejenigen k Personen, welche gegenwärtig das Alter x_1, x_2, \dots, x_k haben, noch den i^{ten} Jahresschluss erleben, dass aber dann die übrigen $n - k$ Personen gestorben sind, durch

$$W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_k; i) \cdot (1 - W(x_{k+1}; i)) \cdot (1 - W(x_{k+2}; i)) \dots (1 - W(x_n; i))$$

ausgedrückt, und folglich die Wahrscheinlichkeit, dass irgendwelche k Personen unter den n Personen, die gegenwärtig das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, noch den i^{ten} Jahresschluss erleben, während die übrigen $n - k$ Personen gestorben sind, durch

$$\sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_k; i) \cdot (1 - W(x_{k+1}; i)) \cdot (1 - W(x_{k+2}; i)) \dots (1 - W(x_n; i))$$

worin mit \sum die Summe aller derjenigen Ausdrücke bezeichnet ist, welche man erhält, wenn man in dem Producte unter dem Summationszeichen alle möglichen k -gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n ausführt.

Wir finden demnach ohne Schwierigkeit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (3) folgenden Ausdruck:

$$(9) \quad {}^v W(x_1, x_2, \dots, x_n; i) = \\ = \sum_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_k; i) \cdot (1 - W(x_{k+1}; i)) (1 - W(x_{k+2}; i)) \dots (1 - W(x_n; i)).$$

Nun ist klar, dass der Ausdruck auf der zweiten Seite dieser Gleichung symmetrisch in Bezug auf $x_1, x_2 \dots x_n$ sein, und aus Gliedern von der Form

$$z_s \cdot \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_s; i)$$

bestehen muss, worin

$$s = v, v+1, v+2, \dots, n,$$

$z_s =$ einem noch zu bestimmenden Zahlenfactor wird, und

$$\sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_s; i)$$

in Übereinstimmung mit dem zuvor Gesagten die Summe aller s -gliedrigen Producte, welche man aus

$$W(x_1; i), W(x_2; i), \dots, W(x_s; i), \dots, W(x_n; i)$$

bilden kann.

Wir haben also gefunden

$$(10) \quad {}^v W(x_1, x_2, \dots, x_n; i) = \sum_{s=v}^{s=n} z_s \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_s; i)$$

oder, wenn wir

$$v+p \quad \text{statt} \quad s \quad \text{und} \quad z_p(v) \quad \text{statt} \quad z_{v+p}$$

eingeführen:

$$(10a) \quad {}^v W(x_1, x_2, \dots, x_n; i) = \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_{v+p}; i)$$

und mit Benutzung der Bezeichnung (2)

$$W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_{v+p}; i) = W(x_1, x_2, \dots, x_{v+p}; i)$$

folglich auch:

$${}^v W(x_1, x_2, \dots, x_n; i) = \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \sum W(x_1, x_2, \dots, x_{v+p}; i).$$

Hieraus ergibt sich mit Hülfe des in § 1 bewiesenen Satzes unmittelbar:

$$(11) \quad {}^v P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot \sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

worin

$$\sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

die Summe derjenigen Ausdrücke bezeichnet, welche man erhält, wenn man in $P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$ alle möglichen $(v+p)$ -gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Versetzung der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n einführt.

§ 4.

Es erübrigt jätzt nur noch den Werth von $z_p(v)$ zu bestimmen, welches auf folgende Weise geschehen kann.

Wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \quad \sigma_{v+p} = \sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

setzen, so erhalten wir

$$(13) \quad {}^v P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot \sigma_{v+p}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Grössen x nach der Reihenfolge des Eintritts des Todes der n Personen geordnet seien, so dass die Person vom Alter x_n die erste ist, welche stirbt,

» » x_{n-1} » nächstfolgende » » »

» » x_{n-2} » » » » »

.

» » x_{v+p} die nach x_{v+p+1} folgende ist, welche stirbt,

.

und endlich

die vom Alter x_{v+1} die letzte Person, die innerhalb der Zeit stirbt, während welcher die Leibrente ausbezahlt wird. Nach dem Tode der Person, welche gegenwärtig das Alter x_v hat, endigt die Leibrente.

Wir wollen ferner

die Zeit, während welcher x_n noch				lebt, die 0 ^{te} Periode					
»	»	»	»	x_{n-1}	aber nicht x_n	»	»	1 ^{te}	»
»	»	»	»	x_{n-2}	aber nicht x_{n-1}	»	»	2 ^{te}	»
.
»	»	»	»	x_{n-s}	aber nicht x_{n-s+1}	»	»	s^{te}	»
.
»	»	»	»	x_{v+p}	aber nicht x_{v+p+1}	»	»	$(n-v-p)^{te}$	»
.
»	»	»	»	x_v	aber nicht x_{v+1}	»	»	$(n-v)^{te}$	»

nennen, und mit

$$(14) \quad e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$$

die gegenwärtigen Werthe von je 1 Mark, welche an den, in die resp.

$$0^{te}, 1^{te}, 2^{te}, \dots, s^{te}$$

Periode fallenden, Jahres-Schlüssen ausbezahlt werden soll. Da nun (Bezeichn. 5)

$${}^vP(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nichts anderes ist als der gegenwärtige Werth von je 1 Mark, die an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden soll, an welchem wenigstens v von den n Personen, die gegenwärtig resp. das Alter x_1, x_2, \dots, x_n haben, noch leben, so kann man dafür auch sagen: an einem jeden Jahres-Schlusse, der in die

$$0^{te}, 1^{te}, 2^{te} \text{ bis einschliesslich in die } (n-v)^{te}$$

Periode fällt, und findet dadurch unmittelbar

$$(15) \quad {}^vP(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{s=0}^{s=n-v} e_s.$$

Wir können aber für dieselbe Grösse (5) auch einen anderen Ausdruck aufstellen, dessen Vergleichung mit (15) uns ohne Schwierigkeit die Unbekannte $z_p(v)$ in (11) bestimmen lässt.

Da $P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$ den gegenwärtigen Werth von je 1 Mark bedeutet, welche an einem jeden solchen Jahres-Schlusse ausbezahlt werden

soll, an welchem die $v + p$ Personen, die jetzt das Alter x_1, x_2, \dots, x_{v+p} haben, *alle* noch leben, so können wir die Summe der Ausdrücke, die man aus

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

erhält, indem man die $v + p$ Grössen durch alle $(v + p)$ -gliedrige Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n ersetzt, auch in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} \sum P(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \text{dem gegenwärtigen Werthe von} \\ & \text{der Anzahl von je } a_p(0) \quad \text{Mark, welche an jedem in die 0}^{\text{te}} \\ & \text{Periode fallenden Jahres-} \\ & \text{Schlusse, das heisst so lange} \\ & x_n \text{ noch lebt, ausbezahlt} \\ & \text{werden soll;} \\ + \quad & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_p(1) \quad \text{Mark, welche an jedem in die 1}^{\text{ste}} \\ & \text{Periode fallenden Jahres-} \\ & \text{Schlusse, das heisst so lange} \\ & x_{n-1} \text{ aber nicht } x_n \text{ lebt,} \\ & \text{ausbezahlt werden soll;} \\ + \quad & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_p(2) \quad \text{»} \quad \text{welche an jedem in die 2}^{\text{te}} \\ & \text{Periode fallenden Jahres-} \\ & \text{Schlusse, das heisst so lange} \\ & x_{n-2} \text{ aber nicht } x_{n-1} \text{ lebt,} \\ & \text{ausbezahlt werden soll;} \\ + \quad & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_p(s) \quad \text{»} \quad \text{welche an jedem in die } s^{\text{te}} \\ & \text{Periode fallenden Jahres-} \\ & \text{Schlusse, das heisst so lange} \\ & x_{n-s} \text{ aber nicht } x_{n-s+1} \text{ lebt,} \\ & \text{ausbezahlt werden soll;} \\ + \quad & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_p(n-v-p) \quad \text{»} \quad \text{welche an jedem in die} \\ & (n-v-p)^{\text{te}} \text{ Periode fallen-} \\ & \text{den Jahres-Schlusse, das} \\ & \text{heisst so lange } x_{v+p} \text{ aber} \\ & \text{nicht } x_{v+p+1} \text{ lebt, ausbe-} \\ & \text{zahlt werden soll.} \end{aligned}$$

Diese Gleichung erhält, unter Benutzung der soeben ihrer Bedeutung nach festgesetzten e_s , die Gestalt

$$(16) \quad \sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p}) = \sigma_{v+p} = \sum_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \cdot a_p(s).$$

Was nun $a_p(s)$ betrifft, oder die Anzahl von Mark, welche an jedem in die s^{te} Periode fallenden Jahres-Schlusse (das heisst so lange x_{n-s} aber nicht x_{n-s+1} lebt) ausbezahlt werden soll, so ist ohne Schwierigkeit zu erschen, dass diese Anzahl = ist der Anzahl der $(v+p)$ -gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Vertauschung der in dieser Periode noch lebenden $n-s$ Personen vom Alter x_1, x_2, \dots, x_{n-s} ; also wird

$$(17) \quad a_p(s) = (n-s)_{v+p} = \frac{(n-s)(n-s-1) \dots (n+1-s-v-p)}{1.2 \dots (v+p)},$$

welches in (16) eingeführt

$$\sigma_{v+p} = \sum_{s=0}^{s=n-v-p} e_s \cdot (n-s)_{v+p}$$

ergibt, oder auch, was dasselbe ist,

$$(18) \quad \sigma_{v+p} = \sum_{s=0}^{s=n-v} e_s \cdot (n-s)_{v+p}.$$

weil $(n-s)_{v+p} = 0$ wird für $s > n-v-p$.

Setzt man diesen Werth von σ_{v+p} in (13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} {}^vP(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot \sum_{s=0}^{s=n-v} e_s \cdot (n-s)_{v+p} \\ &= \sum_{s=0}^{s=n-v} e_s \cdot \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot (n-s)_{v+p}; \end{aligned}$$

diese, mit (15) verglichen, ergibt

$$\sum_{s=0}^{s=n-v} e_s = \sum_{s=0}^{s=n-v} e_s \cdot \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot (n-s)_{v+p},$$

und folglich

$$1 = \sum_{p=0}^{p=n-r} z_p(v) \cdot (n-s)_{r+p},$$

oder, weil

$$(n-s)_{r+p} = 0 \text{ für } p > n-v-s \text{ wird,}$$

$$1 = \sum_{p=0}^{p=n-r-s} z_p(v) \cdot (n-s)_{r+p},$$

welche Formel auch so

$$(19) \quad 1 = \sum_{p=0}^{p=n-r-s} z_p(v) \cdot (n-s)_{n-r-s-p}$$

geschrieben werden kann, und für alle die Werthe

$$s = 0, 1, 2, \dots, n-v$$

gilt. Setzt man hierin

$$n-v-s \text{ statt } s,$$

so erhält man

$$(20) \quad 1 = \sum_{p=0}^{p=s} z_p(v) \cdot (s+v)_{s-p},$$

das heisst

$$(21) \quad 1 = (s+v)_s \cdot z_0(v) + (s+v)_{s-1} \cdot z_1(v) + \dots + (s+v)_1 \cdot z_{s-1}(v) + (s+v)_0 \cdot z_s(v)$$

für alle Werthe $s = 0, 1, 2, \dots, n-v$.

Mit Rücksicht darauf, dass für $s=0$

$$(22) \quad 1 = z_0(v)$$

wird, hat man also zur Bestimmung des $z_p(v)$ folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= (v+1)_1 + (v+1)_0 \cdot z_1(v) \\ 1 &= (v+2)_2 + (v+2)_1 \cdot z_1(v) + (v+2)_0 \cdot z_2(v) \\ &\dots \\ 1 &= (v+k)_k + (v+k)_{k-1} \cdot z_1(v) + (v+k)_{k-2} \cdot z_2(v) + \dots + (v+k)_0 \cdot z_k(v) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(23) \quad 1 = (n-1)_{n-r-1} + (n-1)_{n-r-2} \cdot z_1(v) + (n-1)_{n-r-3} \cdot z_2(v) + \dots \\ \dots + (n-1)_{n-r-k-1} \cdot z_k(v) + \dots + (n-1)_0 \cdot z_{n-r-1}(v)$$

$$(24) \quad 1 = (n)_{n-r} + (n)_{n-r-1} \cdot z_1(v) + (n)_{n-r-2} \cdot z_2(v) + \dots + (n)_{n-r-k} \cdot z_k(v) + \dots \\ \dots + (n)_1 \cdot z_{n-r-1}(v) + (n)_0 \cdot z_{n-r}(v).$$

Unter Benutzung der allgemein bekannten, für die Binomial-Coëfficienten geltenden Gleichung

$$(25) \quad (m+1)_r - m_r = m_{r-1},$$

erhält man, durch Subtraction der Formel (23) von (24),

$$(26) \quad 0 = (n-1)_{n-r} + (n-1)_{n-r-1} \cdot z_1(v) + \dots + (n-1)_1 \cdot z_{n-r-1}(v) + (n-1)_0 \cdot z_{n-r}(v).$$

Lassen wir in dieser Gleichung v in $v+1$ übergehen, ziehen dann die Gleichung (23) ab, und wenden die gebräuchliche Bezeichnung

$$z_k(v+1) - z_k(v) = \Delta z_k(v)$$

an, so finden wir

$$(27) \quad -1 = (n-1)_{n-r-2} \cdot \Delta z_1(v) + \dots + (n-1)_{n-r-k} \cdot \Delta z_{k-1}(v) + \dots \\ \dots + (n-1)_1 \cdot \Delta z_{n-r-1}(v) + (n-1)_0 \cdot \Delta z_{n-r}(v).$$

Dadurch, dass man in (23) statt v nun $v+1$ setzt und das Resultat zu (27) addirt, erhält man (weil $z_0(v) = 1$)

$$0 = (n-1)_{n-r-2} [z_0(v+1) + \Delta z_1(v)] + (n-1)_{n-r-3} [z_1(v+1) + \Delta z_2(v)] + \dots \\ \dots + (n-1)_{n-r-k-1} [z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v)] + \text{etc.}$$

Man hat folglich allgemein

$$z_{k-1}(v+1) + \Delta z_k(v) = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$(28) \quad z_k(v) = - \sum z_{k-1}(v+1).$$

Wenn man $v = 0$ in (21) setzt und (22) berücksichtigt, so erhält man

$$0 = s_{s-1} \cdot z_1(0) + s_{s-2} \cdot z_2(0) + \dots + s_1 \cdot z_{s-1}(0) + z_s(0);$$

und weil diese Formel für

$$s = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

gelten soll, so findet man allgemein

$$z_k(0) = 0,$$

und in Folge hiervon muss man in (28) das Integral $\sum z_{k-1}(v+1)$ so nehmen, dass es für $v = 0$ verschwindet.

Mit Hülfe der bekannten Formel für die Binomial-Coëfficienten

$$\sum (v+k)_{s-1} = (v+k)_s$$

erhält man nach und nach aus (28)

$$\begin{aligned} z_1(v) &= - \sum (1) = (-1)^1 \cdot (v)_1 \\ z_2(v) &= (-1)^2 \cdot \sum (v+1)_1 = (-1)^2 \cdot (v+1)_2 \\ z_3(v) &= (-1)^3 \cdot \sum (v+2)_2 = (-1)^3 \cdot (v+2)_3 \\ &\dots \dots \dots \\ (29) \quad z_p(v) &= (-1)^p \cdot \sum (v+p-1)_{p-1} = (-1)^p \cdot (v+p-1)_p. \end{aligned}$$

Diese Bestimmung für $z_p(v)$ in (11) eingesetzt ergibt für den gesuchten Lebensrenten-Werth folgenden Ausdruck:

$$(30) \quad {}^vP(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{r=n-1} (-1)^p \cdot (v+p-1)^p \cdot \sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p}),$$

worin mit

$$\sum P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

die Summe von denjenigen Functionen bezeichnet ist, die man aus $P(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$ erhält, wenn man darin alle möglichen $(v+p)$ -gliedrigen Combinationen ohne Wiederholung und ohne Verstellung der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n einsetzt.

Ex. 1. Für $n = 2$, $v = 1$ finden wir unmittelbar

$${}^1P(x_1, x_2) = P(x_1) + P(x_2) - P(x_1, x_2).$$

Ex. 2. Für $n = 3$, $v = 1$ ist

$${}^1P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) - [P(x_1, x_2) + P(x_1, x_3) + P(x_2, x_3)] + P(x_1, x_2, x_3)$$

Ex. 3. Für $n = 3$, $v = 2$ finden wir

$${}^2P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2) + P(x_1, x_3) + P(x_2, x_3) - 2 \cdot P(x_1, x_2, x_3).$$

Nachschrift.

Herr Prof. *Ernst Schering* in Göttingen hat mir gelegentlich eine andere Form der Bestimmung der Grössen $z_p(v)$ in der Gleichung (11) mitgetheilt. Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe:

In der Gleichung (10 a), mit (9) verglichen, nemlich

$$(31) \quad {}^v W(x_1, x_2, \dots, x_n; i) = \sum_{k=v}^{k=n} \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots \\ \dots W(x_k; i) \cdot (1 - W(x_{k+1}; i)) \cdot (1 - W(x_{k+2}; i)) \dots (1 - W(x_n; i)) \\ = \sum_{p=0}^{p=n-v} z_p(v) \cdot \sum W(x_1; i) \cdot W(x_2; i) \dots W(x_{v+p}; i)$$

die Coefficienten $z_p(v)$ zu bestimmen.

Zu dem Zwecke benutzen wir die folgende, nach Potenzen von θ geordnete Reihenentwicklung

$$(32) \quad \sum_{k=v}^{k=n} \sum_{\xi'} t W(\xi_1; i) \cdot t W(\xi_2; i) \dots t W(\xi'_k; i) \cdot (1 + \theta W(\xi'_{k+1}; i)) \cdot (1 + \theta W(\xi'_{k+2}; i)) \dots \\ \dots (1 + \theta W(\xi'_n; i)) \\ = \sum_{p=0}^{p=n-v} \sum_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi) \cdot t^{v+p-\varphi} \cdot \theta^\varphi \cdot \sum_{\xi} W(\xi_1; i) \cdot W(\xi_2; i) \dots W(\xi_{v+p}; i) \\ = \sum_{p=0}^{p=n-v} Z(v, p, t, \theta) \cdot \sum_{\xi} W(\xi_1; i) \cdot W(\xi_2; i) \dots W(\xi_{v+p}; i).$$

Hier ist zu bemerken:

$$1:o \quad \xi_1 \dots \xi_k, \xi_{k+1} \dots \xi_n$$

sollen mit den Werthen $x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_n$,

abgesehen von der Reihenfolge, aber ohne Wiederholung zuzulassen, übereinstimmen.

2:o \sum_{ξ} soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten, bei denen aber Platzveränderung weder der $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_k$ unter sich, noch der $\xi_{k+1}, \xi_{k+2} \dots \xi_n$ unter sich zulässig ist.

3:o $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{v+p}$ sollen irgend welche $v+p$ der Grössen $x_1, x_2 \dots x_n$ bedeuten, aber ohne eine Wiederholung unter diesen zuzulassen.

4:o \sum soll die Summation über alle solche Werthensysteme bedeuten; aber ohne eine Platzveränderung der Grössen ξ zuzulassen, also die Summation über alle $(v+p)$ -gliedrigen Combinationen der $x_1, x_2 \dots x_n$ ohne Wiederholung und ohne Versetzung.

5:o $C(v+p, \varphi)$ sind zu bestimmende ganze Zahlen-Coefficients, abhängig von $v+p$ und φ .

Es ist

$$Z(v, p, t, \theta) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=p} C(v+p, \varphi) \cdot t^{v+p-\varphi} \theta^{\varphi}$$

gesetzt, und es ist offenbar

$$(33) \quad z_p(v) = Z(v, p, t, \theta) \text{ für } t = +1, \theta = -1.$$

Nun bedeutet $C(v+p, \varphi)$ augenscheinlich die Anzahl der mit dem Factor $t^{v+p-\varphi} \theta^{\varphi}$ versehenen Glieder, welche entstehen, wenn man in dem ersten Theil der Doppelgleichung (32) durch Multiplication die Klammer-Ausdrücke $(1 + \theta W(\xi'_i; i))$ auflöst; also ist

$C(v+p, \varphi)$ = der Anzahl der φ -gliedrigen Combinationen, ohne Wiederholung und ohne Versetzung, von $v+p$ Elementen, das heisst

$$C(v+p, \varphi) = \frac{(v+p)(v+p-1) \dots (v+p+1-\varphi)}{1.2 \dots \dots \dots \varphi} = (v+p)_{\varphi}.$$

daher

$$Z(v, p, t, \theta) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=p} (v+p)_{\varphi} \cdot t^{v+p-\varphi} \cdot \theta^{\varphi},$$

und demnach

$$Z(v, p, t=1, \theta=-1) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \cdot (v+p)_{\varphi}$$

das heisst, zufolge (33),

$$z_p(v) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=p} (-1)^{\varphi} \cdot (v+p)_{\varphi} = (-1)^p \cdot (v+p-1)_p,$$

ebenso wie in Formel (29).

EINE ANNÄHERUNGSMETHODE IM PROBLEME DER DREI KÖRPER.

VON

HUGO GYLDÉN.

Von dem Problem der drei Körper wird bekanntlich gesagt, dass es noch heut zu Tage ungelöst dasteht und mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden analytischen Hilfsmitteln nicht gelöst werden kann, wenn nämlich die Lösung im streng mathematischen Sinne aufgefasst wird. Ein derartiger Ausspruch erheischt jedoch eine genaue Fixirung dessen, was man unter »streng mathematisch« zu verstehen hat; denn sonst könnte die Meinung darüber schwankend werden, was die Wissenschaft in Bezug auf das besagte Problem bereits geleistet hat, und was von ihr in der nächsten Zeit erwartet werden darf.

Nennt man nur diejenige Lösung streng mathematisch, welche direct, d. h. ohne fortgesetzte Annäherungen zu den unbedingt geltenden Relationen zwischen der Zeit und den Coordinaten der drei Körper führt, so muss eingeräumt werden, dass wir bis jetzt gar keine Vorstellung davon haben, wie eine solche Lösung zu Stande gebracht werden soll, und dass die Hoffnung, diese demnächst zu erhalten, vorläufig als illusorisch bezeichnet werden muss. Der Ursache nachzuforschen und feststellen zu suchen, woher diese geringen Aussichten entspringen, ist aber nicht nur an und für sich nicht ohne Interesse, sondern für die zukünftige Leistungsfähigkeit der Wissenschaft auf dem Gebiete des betreffenden Problem es von grösster Bedeutung.

Die Beantwortung jener Frage wäre eine leichte, wollte man sich damit begnügen zu sagen, unsere analytischen Hilfsmittel sind gegen-

wärtig noch nicht in dem Maasse ausgebildet, dass wir mit ihnen die Schwierigkeiten des Problems der drei Körper bewältigen könnten. Eine Erklärung aber wäre hiermit nicht gegeben, sondern die Frage nur auf ein anderes Gebiet übergeführt, nämlich auf das der Metaphysik (der Mathematik). Tiefer liegt also der Grund jenes Unvermögens das Problem zu lösen, aber andererseits doch erkenntlich genug um nachgewiesen werden zu können. Es dürfte nämlich kaum ernstlichem Widerspruch begegnen, wenn wir sagen, dass die Ursache, weshalb die Lösung des Problems der drei Körper uns so schwierig erscheint, einfach darin liegt, dass uns die Vorstellungen von den Bewegungserscheinungen in einem Systeme von mehr als zwei Körpern noch abgehen oder doch noch sehr wenig geläufig sind. Diese Bewegungserscheinungen sind aber auch voraussichtlich nicht in so einfacher Weise aus denen zusammen zu setzen, die wir in einem Systeme von zwei Körpern beobachten können — und die daher bereits eine Thatsache der Erfahrung sind — dass unser Geist, durch Synthese dieser einfacheren Elemente, sich unmittelbar in die Sphäre jener mehr zusammengesetzten Vorstellungen versetzen könnte.

Die Erscheinungen, die man seit 2000 Jahren im Planetensysteme beobachtete, und die zunächst ihren Ausdruck in den Kepler'schen Gesetzen gefunden haben, waren auch nicht die geeignetsten jene Vorstellungen auszubilden, aus welchen die für die directe Lösung des Problems der drei Körper vorauszusetzenden Begriffe hätten abstrahirt werden können. Im Planetensysteme ist nämlich der Einfluss der Planeten auf einander gegenüber dem der Sonne sehr gering, während Zeiträumen, die mit einem für uns anschaulichen Maasse übersichtlich gemessen werden können. Die Erscheinungen, die wir beobachtet haben, sind also nahezu dieselben, die man in einem Systeme von zwei Körpern beobachtet hätte, und schliessen sich während der historischen Zeit den Kepler'schen Gesetzen einigermassen an. Während Zeiträumen aber, die nach Jahrtausenden gezählt werden müssen, gestalten sich die Erscheinungen der Planetenbewegung wesentlich anders, und man kann wohl sagen, dass die Bahnen der Planeten durchschnittlich Kreisen ähnlicher sind als Kepler'schen Ellipsen, wenn nämlich die Elemente letzterer als konstant angenommen werden. Einem intelligenten Wesen, dem die Zeit eines Jahrtausends etwa vorkäme, wie uns ein Tag, würde die Kepler'sche Ellipse schwerlich wie eine Annäherung an die wirkliche Bahn vorkommen. Es würde nicht die zum Begreifen

des Problems der drei Körper erforderlichen Vorstellungen aus Elementen zusammen zu setzen suchen, die ihm die Bewegungen im Systeme von nur zwei Körpern darbieten. In der Natur unserer Existenzbedingungen liegt es also, dass die Vorstellungen, deren Vorhandensein eine Bedingung der Lösung des oben erwähnten Problemcs ausmacht, noch nicht entwickelt sind; die mathematische Analyse hat daran wenig Schuld. Mittelst Analyse jedoch eine Erkenntniss erlangen zu wollen, wozu nicht schon vorher der Grund vom menschlichen Geiste erworben wäre, müsste als dem widersprechend erachtet werden, was uns die Theorie der Erkenntniss lehrt.

Die mathematische Analyse ist zunächst nur der Hebel, durch den die construïrbaren Vorstellungen, die einen immanenten Character haben, in's Bewusstsein gebracht und zu Urtheilen verarbeitet werden. Ihre Leistung ist derjenigen der logischen Operationen æquivalent; nur verläuft die Kette der Schlussfolgerungen bei ersterer theilweise im Unbewussten, indem sie durch den mathematischen Mechanismus fortgeführt wird, während die logischen Schlüsse sämmtlich bewusst sind oder doch sehr leicht bewusst werden können.

Unsere Vorstellungswelt gründet sich ursprünglich auf Sinneswahrnehmungen, beziehungsweise Beobachtungen; und wie wir auch diese Welt erweitern, immer müssen wir in derselben Sensationen als Elemente wiederentdecken können. Eine Vorstellung, die nicht in der Sphäre des empirisch Gegebenen wurzelt, oder bei der empirische Elemente nicht nachweisbar sind, giebt es nicht. — Umgekehrt aber, können wir aus solchen Elementen doch unsere Vorstellungswelt erweitern, indem wir nämlich die erweiterten Begriffe mit Hülfe der Phantasie veranschaulichen, und bei einem solchen Processe ist wiederum die mathematische Analysis verwendbar, indem sie die Formulirung der Begriffserweiterungen erleichtert.

Erkennen wir nun diesen Weg zur Erweiterung unserer Kenntnisse im allgemeinen als einen wissenschaftlich berechtigten an — und ich wüsste nicht, wie derselbe zu vermeiden wäre — so handelt es sich darum, denselben für das jetzt in Frage stehende Problem zu verwerthen und überhaupt mathematisch zu bezeichnen. Die Synthese aber, welche aus einfacheren Vorstellungselementen zu mehr zusammengesetzten führt, entspricht genau dem Processe, durch den eine Function durch fortgesetzte

Annäherungen gebildet wird, wobei die einzelnen Resultate aus einfacheren, uns bereits bekannten Functionen zusammengesetzt sind. Es ist also der Weg der successiven Annäherungen, den wir verfolgen müssen, der uns aber keineswegs die Aussicht entzieht das Resultat einst in aller Strenge erhalten zu können; denn der Begriff der mathematischen Transcendenz, der diesem Wege im allgemeinen eigenthümlich ist, kann auf die resultirende Functionsform übertragen werden; die schliesslich auch das Resultat der directen Lösung sein muss.

Die vorhergehenden Betrachtungen können wir nun kurz folgendermaassen zusammenfassen: suchen wir eine *einfache* Lösung mittelst uns jetzt bekannter Functionsformen, so stellen wir uns jedenfalls eine widersinnige Aufgabe; wir müssen vielmehr unsern Geist dahin zu entwickeln suchen, dass die Lösung, die für uns einst erreichbar wird, einfach erscheint. Dieser Evolutionsprocess heisst, mathematisch gesprochen, das Anschaulichwerden neuer Functionsformen. — Nicht wie durch einen Zauberschlag oder durch eine unmittelbare Erkenntniss werden wir die Lösung des Problems der drei Körper erlangen, sondern auf einem Pfade, auf dem jeder Schritt nur mit Ueberwindung bedeutender Schwierigkeiten gethan werden kann.

Wenn wir also den Weg der successiven Annäherungen einschlagen, den einzigen auf dem wir gegenwärtig einige Aussicht haben, das betreffende Problem wenigstens in gewissen Fällen lösen zu können, so müssen wir dabei an zwei Bedingungen festhalten: erstens nämlich, dass die Folge der Annäherungen convergent sei, und zweitens, dass die Resultate dieser nie die Zeit, oder Kreisbögen, die mit der Zeit unbeschränkt wachsen können, ausserhalb der periodischen Functionszeichen enthalten. Die Nothwendigkeit jene erste Bedingung zu stellen, leuchtet von selbst ein; der zweiten muss aber genügt werden, damit die Lösung eine wirklich unbedingte Gültigkeit habe und der vorausgesetzten Stabilität des Systems entspreche. — Eine jede Lösung, welche den gestellten Bedingungen genügt, nenne ich eine *absolute Lösung*, ohne Rücksicht auf welchem Wege dieselbe auch erlangt worden sei. Man erkennt aber leicht, dass es nur eine einzige absolute Lösung geben kann; so dass, wenn man dieselbe auch unter verschiedener Form findet, die eine aus der andern durch gehörige Entwicklung hervorgehen muss. Das Resultat, welches durch die Methode der successiven Annäherungen gefunden wird, muss

also mit dem identisch sein, was einst durch die directe Lösung hervor-
gehen wird.

Die Lösung des Problems der drei Körper im absoluten Sinne ist eigentlich nur von Lagrange und Laplace in's Auge gefasst worden; was seitdem auf dem Gebiete der Mechanik des Himmels geleistet wurde, ist zwar äusserst werthvoll und für die Astronomie fördernd gewesen; in Bezug auf den absoluten Character der Resultate aber kaum über die Arbeiten jener grossen Männer hinausragend. Von wie grossem Werthe diese Arbeiten aber auch gewesen sind — sie haben in der That doch unsere Vorstellungen über die Bewegungen der Planeten entwickelt — so sind sie doch keineswegs als endgültig anzusehen. Man erinnert sich z. B., dass die gefundenen Ausdrücke der Secularstörungen aus einer begrenzten Anzahl von Gliedern bestehen, während diese Anzahl in der Wirklichkeit doch unendlich ist: auch lassen sich gegen die von den genannten Gelehrten aufgestellten Methoden, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen zu eliminiren, Bedenken erheben, welche in der Bemerkung wurzeln, dass wenn einmal die Zeit als Factor in einem intermediären Resultate aufgetreten ist, so hat man möglicherweise das erste Glied einer nicht beständig convergenten Reihenentwicklung vor sich.

Seit einiger Zeit bin ich im Besitze einer Methode, die absolute Lösung des mehrerwähnten Problemcs zu finden, welche, wenigstens auf die Untersuchung der Bewegungen in unserem Planetensystem angewendet, jedenfalls den beiden oben näher bezeichneten Bedingungen genügen dürfte. In dem Maasse jedoch, wie die Bahnen der einzelnen Körper des Systems mehr excentrisch werden und die Anziehungen der Hauptkraft im Werthe näher kommen, wird die Anwendung dieser Methode mehr und mehr mühsam, und es lässt sich eine solche Constitution des Systems denken, dass die Anwendbarkeit derselben völlig illusorisch wird. Es scheint, dass wir in der nächsten Zeit in solchen Fällen auf die absolute Lösung verzichten müssen und uns mit einer relativen, für eine begrenzte Zeit geltenden begnügen. — Die erwähnte Methode beruht auf Principien, von denen ich einen Theil jetzt darzulegen mir erlauben werde.

Es handelt sich darum, gewisse Grössen aus Differentialgleichungen zu bestimmen, ohne dass in den Resultaten die unabhängige Veränderliche als Factor vorkommt, wiewohl sie als solcher erscheint, wenn man in der ersten Annäherung alle Grössen, welche mit der zweiten Potenz der stö-

renden Masse multiplicirt sind, bei Seite lässt. In den Differentialgleichungen, durch deren Integration man genäherte Werthe der Unbekannten findet, müssen daher vor allen Dingen gewisse Grössen zweiter Ordnung mitgenommen werden. Trotzdem lassen sich die meisten Gleichungen, welche bei der hier in Frage stehenden Untersuchung nach und nach vorkommen, auf die Form der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bringen, und die in diesen Gleichungen vorkommenden bekannten Functionen lassen sich innerhalb gewisser Gränzen willkürlich wählen. Eine solche Gleichung sei

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 y = X_0;$$

die Function X_1 wird als bekannt angenommen und besteht aus zwei Theilen, wovon der eine von der störenden Masse unabhängig ist, der zweite aber mit dieser Masse verschwindet. Die Function X_0 nehmen wir auch als bekannt an, aber nur in der ersten Annäherung; denn sie enthält im Allgemeinen Glieder der Form

$$\psi_0 + \psi_2 y^2 + \psi_3 y^3 + \dots$$

und da y als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird, und ebenso die Functionen ψ_0, ψ_2, \dots , so vernachlässigen wir, wenn X_0 mit ψ_0 identificirt wird, nur Grössen dritter Ordnung. Und wenn wir zu der angesetzten Reihe noch ein Glied $\psi_1 y$ fügen, so ist ψ_1 , wenn auch nur mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, doch aus andern Gründen so klein, dass das Product $\psi_1 y$ zu den Grössen dritter Ordnung gezählt werden darf.

Indem die Function ψ_1 als gewissermaassen von X_1 abgetrennt anzusehen ist, lässt sich letztere innerhalb gewisser Gränzen beliebig wählen, und ich werde bei der Bestimmung dieser Function der Bedingung zu genügen suchen, dass das Integral der Gleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 y = 0$$

die Form:

$$(3) \quad y = C_1 P + C_2 [Q + lxP]$$

annimmt. Hier bedeuten C_1 und C_2 die Integrationsconstanten, P und Q zwei Functionen von x , die nur periodische Glieder enthalten, und endlich l eine zu unserer Verfügung stehende Constante.

Setzen wir:

$$y_1 = P; \quad y_2 = Q + lxP,$$

so müssen bekanntlich y_1 und y_2 der Bedingungsgleichung

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = \mu$$

genügen, wo μ eine neue Constante bezeichnet. Aus dieser Bedingungsgleichung lässt sich eine Relation zwischen P und Q herleiten, und es ergibt sich

$$QP - PQ + lPP = -\mu,$$

woraus folgt

$$Q = P \left\{ C_3 - \int \left(\frac{\mu}{PP} + l \right) dx \right\},$$

indem C_3 die Integrationsconstante bezeichnet, die wir aber sofort gleich Null setzen können. — Damit nun Q die angedeutete Eigenschaft besitze, nämlich kein Glied mit dem Factor x zu enthalten, muss die Constante l offenbar so gewählt werden, dass sie sich gegen das constante Glied in der Entwicklung von $\frac{\mu}{PP}$ aufhebt. Wir werden in der Folge die Constante μ gleich $+1$ oder gleich -1 setzen, wodurch die Allgemeinheit der Resultate offenbar nicht gemindert wird.

Dies vorausgesetzt, stellen wir das allgemeine Integral der Gl. (1) folgendermaassen auf

$$y = P \left\{ C_1 - \int X_0 [Q + lxP] dx \right\} \\ + [Q + lxP] \left\{ C_2 + \int X_0 P dx \right\}$$

Weil aber

$$\int x X_0 P dx = x \int X_0 P dx - \int dx \int X_0 P dx,$$

so hat man auch

$$y = C_1 P + C_2 [Q + lxP] \\ - P \int X_0 Q dx + Q \int X_0 P dx \\ + lP \int dx \int X_0 P dx$$

Durch die Aufstellung dieser Formel leuchtet die Absicht mit der gewählten Form der Differentialgleichung (1) sofort ein. Findet sich nämlich im Producte X_0Q oder in dem Integrale

$$\int X_0 P dx$$

ein constantes Glied, so erscheint im Resultate ein Glied von der Form

$$\gamma x P,$$

indem γ einen numerischen Coefficienten bezeichnet. Dieses Glied bringt man aber unmittelbar zum Verschwinden, indem man die Integrationsconstante C_2 in geeigneter Weise bestimmt, die bei den Anwendungen der aufgestellten Integralformeln auf das Problem der drei Körper immer überzählig ist.

Das Product X_0P enthält entweder gar kein constantes Glied, oder doch nur ein solches von höherer Ordnung, und dies braucht bei der ersten Annäherung nicht mit berücksichtigt zu werden. Indem wir nun die Constante C_2 in der oben bezeichneten Weise bestimmen, die Constante C_1 aber vorläufig unbestimmt lassen, erhalten wir ein Resultat der Form

$$y = C_1 P + C_2 Q + \text{per. Glieder};$$

und wenn wir von X_0 nur die Glieder dritter Ordnung inclusive berücksichtigen, so haben wir

$$X_0 = \psi_0 + \psi_1 [C_1 P + C_2 Q + \dots]$$

$$+ \psi_2 [C_1 P + C_2 Q + \dots]^2$$

und

$$X_0 P = \psi_0 P + \psi_1 P [C_1 P + C_2 Q + \dots] + \dots$$

In diesem Ausdrücke muss man nun suchen die Constante C_1 so zu bestimmen, dass kein constantes Glied daselbst nachbleibt. — Würde eine solche Bestimmung indessen nicht gelingen, so wäre hierdurch angezeigt, dass der Erscheinung, welche durch das Integrationsresultat representirt wird, die Stabilität mangelt. Bei der Anwendung der oben bezeichneten Integrationsmethode auf die Bewegungen der Planeten kommen derartige Hindernisse indessen nicht vor; denn, wie schon bemerkt wurde, das Product X_0Q enthält in der Regel kein constantes Glied, und wenn ein solches vorkommt, so lässt es sich in der angeführten Weise eliminiren.

Der Functionen P , welche dem oben bezeichneten Zwecke entsprechen, giebt es verschiedene. Die einfachsten und zugleich auch in anderer Beziehung geeigneten findet man unter den rationalen Verbindungen einfacher elliptischer Functionen. Wir entnehmen dieser zuerst die allereinfachsten Fälle, indem wir für P der Reihe nach die Werthe $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ und $\operatorname{dn} x$ setzen; es ergeben sich alsdann für Q und l

$$\begin{aligned} Q &= \operatorname{sn} x \frac{H'(x)}{H(x)}; & l &= -\frac{K-E}{K} \\ Q &= \frac{\operatorname{cn} x}{k'^2} \frac{H_1'(x)}{H_1(x)}; & l &= -\frac{k'^2 K - E}{k'^2 K} \\ Q &= \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}; & l &= \frac{E}{k'^2 K} \end{aligned}$$

Die Resultate sind also sehr einfach und dabei in leichter Weise zu verwerthen; sie entsprechen, wie man leicht bemerkt, den Integralen der Lamé'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2] y &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1] y &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} - [2k^2 \operatorname{sn} x^2 - k^2] y &= 0 \end{aligned}$$

In nächster Reihe werden wir für P die Combinationen:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} x}{dx} &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \\ -\frac{d \operatorname{cn} x}{dx} &= \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \\ -\frac{1}{k^2} \frac{d \operatorname{dn} x}{dx} &= \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \end{aligned}$$

substituiren, und finden dann nach einigen Reductionen die folgenden Werthe der Grössen Q und l :

$$Q = \frac{1}{k'^2} \operatorname{sn} x - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x; \quad l = \frac{(1-k^2)K - (1+k^2)E}{k'^4 K}$$

$$Q = -\operatorname{cn} x - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2} \frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x; \quad l = \frac{k'^2 K - (k'^2 - k^2)E}{k'^2 K}$$

$$Q = -\operatorname{dn} x - \frac{1+k'^2}{k'^2} \frac{H'_1(x)}{H_1(x)} \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x; \quad l = \frac{(1+k'^2-k^2)K - (1+k^2)E}{k'^2 K}$$

Die Differentialgleichungen, deren Integrale die soeben angeführten Ausdrücke representiren, sind die folgenden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - [2.3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2] y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [2.3k^2 \operatorname{cn} x^2 - 1] y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [2.3 \operatorname{dn} x^2 - 1 - k'^2] y = 0,$$

und sie gehören sämmtlich zu der Classe der Lamé'schen Gleichungen.

Man könnte leicht die Anzahl jener Resultate beliebig vermehren, allein es erscheint kaum von Interesse, wenigstens nicht für unseren Zweck, hier weiter vorzugehen. Statt dessen werde ich eine andere Form von P anführen, welche gleichfalls den gestellten Bedingungen genügt, die aber nicht zu den elliptischen Functionsformen gehört. Diese Form ist die folgende:

$$P = e^{\lambda \operatorname{Sin} x}$$

wo λ einen constanten Coefficienten bezeichnet. Es findet sich hiermit:

$$Q = e^{\lambda \operatorname{Sin} x} \int [e^{-2\lambda \operatorname{Sin} x} - l] dx$$

Dieser Ausdruck muss nun nach den Vielfachen von x entwickelt werden, was leicht mit Hülfe von Cylinderfunctionen geschehen kann. Wir begnügen uns, hier bloss die ersten Glieder einzusetzen. Es findet sich alsdann:

$$l = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 \cdot 2} (2\lambda)^2 + \frac{3}{8} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2\lambda)^4 + \dots$$

$$\begin{aligned}
Q = e^{\lambda \sin x} \{ & [2\lambda + \frac{3}{4} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2\lambda)^3 + \dots] \cos x \\
& - \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \frac{1}{1 \cdot 2} (2\lambda)^2 + \dots] \sin 2x \\
& - \dots \}
\end{aligned}$$

Endlich findet sich die Differentialgleichung, welcher durch diese Resultate genügt wird, wie folgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda \sin x - \lambda^2 \cos x^2] y = 0$$

Die Anwendung der im Vorhergehenden dargestellten Methode werde ich jetzt an einem Beispiele zeigen, was ich mit der Angabe einiger Details hier anführe. Die vorgelegte Differentialgleichung sei:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \alpha^2 \cos \lambda v \cdot y = X_0,$$

wo α und λ constante Coefficienten und X_0 eine Function der Form:

$$\psi_0 + \psi_1 y + \psi_2 y^2 + \dots$$

bezeichnen mögen. Es werde nun ein Integral der vorgelegten Gleichung ohne willkürliche Constanten verlangt, das aber aus lauter rein periodischen Gliedern bestehen soll.

Statt der Veränderlichen v führe ich eine neue x ein, indem ich setze:

$$\lambda v = 2 \frac{\pi}{2K} x$$

und mir vorbehalte, über den Modul k , von dem das vollständige Integral K abhängt, noch zu disponiren. Hiernach erhalten wir:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \cos 2 \frac{\pi}{2K} x \cdot y = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 X_0$$

Um diese Gleichung auf eine der im Vorhergehenden betrachteten Formen zu bringen, bedienen wir uns der Entwicklung:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x &= -A \\ &+ \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{16q}{k^2(1-q^2)} \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x \\ &+ \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{32q^2}{k^2(1-q^4)} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x \\ &+ \dots,\end{aligned}$$

wo die Constante A von der Ordnung der Grösse k^2 ist. Man hat nämlich:

$$A = 1 - \frac{2}{k^2} \frac{K-E}{K}$$

oder

$$A = -\frac{\pi}{2K} \left(\frac{1}{8} k^2 - \frac{3}{64} k^4 + \dots \right)$$

Aus der angeführten Entwicklung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \operatorname{Cos} 2 \frac{\pi}{2K} x &= \frac{k^2(1-q^2)}{16q} \operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x \\ &- \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{2q(1-q^2)}{1-q^4} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x \\ &- \dots \\ &+ \frac{k^2(1-q^2)}{16q} A\end{aligned}$$

Diesen Werth führen wir in die vorgelegte Differentialgleichung ein, und bestimmen dabei den Modul in der Weise, dass der Coefficient von $\operatorname{Cos} 2 \operatorname{am} x$ gleich k^2 wird. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} - (2k^2 \operatorname{sn} x^2 - k^2) y &= \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_0 \\ &- \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} \frac{k^2(1-q^2)}{16q} Ay \\ &+ \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{2q(1-q^2)}{1-q^4} \operatorname{Cos} 4 \frac{\pi}{2K} x \cdot y \\ &+ \dots \\ &= X.\end{aligned}$$

indem wir nämlich der Kürze wegen die Summe der Glieder rechter Hand mit X bezeichnen. Wie man leicht bemerkt, sind die mit y multiplicirten Glieder rechter Hand Grössen dritter Ordnung.

Das Integral dieser Gleichung ist uns aber bekannt; es ist nämlich:

$$y = C_1 \operatorname{dn} x + C_2 \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \left\{ \frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} + \frac{E}{K} x \right\} \\ - \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \int X \operatorname{dn} x \frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} dx + \frac{\operatorname{dn} x}{k'^2} \frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} \int X \operatorname{dn} x dx \\ + \frac{1}{k'^2} \frac{E}{K} \operatorname{dn} x \int dx \int X \operatorname{dn} x dx$$

Vermöge der Bedingung, wodurch k bestimmt werden soll, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{k^2(1-q^2)}{16q} \frac{4\alpha^2}{\lambda^2} - k^2,$$

woraus folgt:

$$q^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\alpha^2} q - 1 = 0$$

Hieraus ergibt sich:

$$q = -2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \sqrt{4 \frac{\lambda^4}{\alpha^4} + 1}$$

und sieht man sogleich, dass bei jedem Werthe des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\alpha}$ die Grösse q kleiner, oder jedenfalls nicht grösser als die Einheit ausfallen muss.

Wenn nun X_0 eine bekannte, aus periodischen Gliedern bestehende Function bedeutet, wo das Argument $2 \frac{\pi}{2K} x$ und die Vielfachen desselben nicht vorkommen, so wird man den Werth des Integrales leicht und sicher ermitteln können, sofern die willkürlichen Constanten C_1 und C_2 gleich Null gesetzt werden dürfen. — Findet sich aber in X_0 ein Glied der Form:

$$l \sin 2 \frac{\pi}{2K} x,$$

sei es direct, oder in Folge der successiven Annäherungen entstanden, so erscheint im Resultate ein Glied der Form

$$l_1 x \, \text{dn} \, x,$$

was aber unmittelbar weggeschafft werden kann, indem man die Constante C_2 aus der Gleichung

$$C_2 - k'^2 l_1 = 0$$

bestimmt.

Endlich betrachten wir den Fall, wo in X_0 ein Glied der Form

$$h \cos 2 \frac{\pi}{2K} x$$

vorkommt. Ein solches Glied kann zwar nicht immer weggeschafft werden, aber doch unter gewissen Bedingungen, die eben dem Probleme der drei Körper eigenthümlich sind. Hierzu gehört nämlich, dass der Coefficient h eine Grösse zweiter Ordnung ist, sowie dass in der Function ψ_1 ein Glied derselben Form vorhanden ist. Nennen wir den Coefficienten dieses Gliedes p , so ist die Constante C_1 so zu bestimmen, dass der Coefficient von $\cos 2 \frac{\pi}{2K} x$ in der Entwicklung von

$$h \cos 2 \frac{\pi}{2K} x + p C_1 \cos 2 \frac{\pi}{2K} x \, \text{dn} \, x$$

verschwindet. — Es ist übrigens leicht zu bewirken, dass ein solches Glied in der Function ψ_1 vorkommt; denn wäre es nicht vorhanden, so hätte man nur nöthig, die ursprüngliche Gleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + (\alpha^2 + p) \cos \lambda v \cdot y = X_0 + p \cos \lambda v \cdot y$$

zu schreiben und $\alpha^2 + p$ statt α^2 in den nachfolgenden Formeln anzuwenden.

Wir haben jetzt gesehen, wie die im Vorhergehenden entwickelte Methode angewendet wird; in Bezug auf ihr Wesen und ihre Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper seien mir noch einige Bemerkungen gestattet.

Die Glieder, die wir zu vermeiden beabsichtigten, sind als dadurch entstanden anzusehen, dass eine gewisse Grösse gleich Null geworden ist. Das Glied $x \sin x$ entsteht z. B. dadurch, dass die Grösse ∂ in dem Ausdrücke

$$\sin x \int \cos \partial x \cdot dx$$

verschwindet. Diesem entsprechend ist auch das Mittel, solche Glieder zu

vermeiden, hier gefunden worden. Denn die Lamé'schen Gleichungen, von welchen wir vorhin eine in Anwendung brachten, sind specielle Fälle von allgemeineren Gleichungen, welche von Herrn Hermite zuerst integrirt worden sind. Die hier benutzten Gleichungen entstehen aus den allgemeinen dadurch, dass der von Hermite mit ω bezeichneten Grösse gewisse Specialwerthe zuertheilt werden, nämlich 0, K und $K \pm iK'$. Ueberhaupt lassen sich für den hier verfolgten Zweck geeignete Gleichungen finden, indem man die Grösse c in dem Ausdrücke

$$y = z \left(e^{c \int \frac{dx}{z^2}} + e^{-c \int \frac{dx}{z^2}} \right),$$

wo z eine Function von x bedeutet, in Null übergehen lässt. Bekanntlich lassen sich die Integrale vieler Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine solche Form darstellen. Durch die angedeutete Specialisirung geht dieselbe, jedoch nicht immer, in solche über, welche wir im Vorhergehenden betrachtet haben.

Umgekehrt aber könnte man, gerade an diese Bemerkung anknüpfend, vermuthen, dass unser Zweck in mehr directer Weise erreicht werden würde, wenn man die Grösse c nicht gleich Null setzte, sondern derselben einen endlichen, wenn auch kleinen Werth gäbe. Dass dieser Punkt genauer, als bisher geschah, untersucht werden muss, ist sicher; indessen hat es doch den Anschein, als ob die Vortheile mehr auf Seite der soeben vorgetragenen Methode liegen.

Die Herstellung der Form, bei der das Argument ausserhalb der trigonometrischen Functionszeichen nicht heraustritt, ist indessen von durchgreifender Bedeutung für die Lösung des Problems der drei Körper. Glieder, die man, ohne diese Form zu erhalten zu suchen, zusammenschlagen konnte, lassen sich nicht mehr vereinigen. Die Glieder

$$A \cos x + B \cos [(1 + \delta_1)x + D_1] + C \cos [(1 + \delta_2)x + D_2] + \dots,$$

wo $\delta_1, \delta_2 \dots$ kleine Grössen erster Ordnung bedeuten, konnte man z. B. in der Weise vereinigen, dass man nach den Potenzen von diesen Grössen entwickelte und bloss die von den ersten Potenzen abhängigen Glieder beibehielt. Die Summe wurde alsdann auf nur zwei Glieder reducirt. Indem aber nun eine derartige Entwicklung vermieden werden soll, verzichtet man selbstverständlich auf die entsprechende Vereinfachung. Die

obigen Glieder lassen sich aber in anderer Weise zusammenziehen, indem man nämlich neue Functionsformen bildet. Wir setzen:

$$\eta \cos \pi = A + B \cos (\partial_1 x + D_1) + C \cos (\partial_2 x + D_2) + \dots$$

$$\eta \sin \pi = -B \sin (\partial_1 x + D_1) - C \sin (\partial_2 x + D_2) - \dots$$

und erhalten die obige Summe durch den Ausdruck

$$\eta \cos (x - \pi)$$

representirt.

Die Grössen η und π sind jetzt Functionen von x , die sich sehr langsam ändern, weil die Grössen $\partial_1, \partial_2, \dots$ sehr klein sind. Verschwinden diese Grössen ganz und gar, so gehen jene Functionen in Constanten über, und in der That entsprechen sie Integrationsconstanten, wenn die störende Masse gleich Null wird. Die Integrationsconstanten der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper sind aber nicht Specialwerthe jener Functionen, sondern sind theils in den Coefficienten A, B, C, \dots enthalten theils in den Bögen D_1, D_2, \dots . Dadurch, dass wir die vollständige Form beibehalten, kommen wir aber in die Lage, den Begriff einer absoluten Bahn bilden zu können, d. h. einer Bahn, deren Elemente absolute Constanten sind. Die Abweichungen der wirklichen Bewegungen von dieser Bahn sind immer kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte.

DAS PROBLEM DER CONFIGURATIONEN

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Seit einer Reihe von Jahren pflege ich in meinen geometrischen Vorlesungen auf eigenthümliche Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen aufmerksam zu machen, welche durch die Regelmässigkeit ihrer Anordnung sich auszeichnen. Diese Gruppierungen, welche ich »Configurationen« genannt habe,⁽¹⁾ treten bei geometrischen Untersuchungen nicht selten auf. So liegen die 12 Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln zu dreien in 16 Geraden und zu sechsen in 12 Ebenen, und diese 12 Ebenen gehen zu dreien durch die 16 Geraden und zu sechsen durch die 12 Punkte. Die 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen einer Kummer'schen Fläche vierter Ordnung und vierter Classe haben solche gegenseitige Lage, dass durch jeden der 16 Punkte sechs von den 16 Ebenen gehen und auf jeder der letzteren sechs von den 16 Punkten (und zwar auf einem Kegelschnitt) liegen. Wenn zwei Tetraëder einander gegenseitig eingeschrieben sind, so enthält jede ihrer 8 Flächen vier ihrer 8 Eckpunkte und durch jeden der letzteren gehen vier der 8 Flächen. Auch die 15 Potenzebenen, 20 Potenzaxen und 15 Potenzpunkte, welche sechs Kugeln zu zweien, dreien und vierten bestimmen, bilden eine räumliche Configuration,

⁽¹⁾ Zuerst 1876 in meiner »Geometrie der Lage« I, 2 Aufl., S. 4 (vgl. ebenda S. 162 N:o 13), dann in Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 209 und in meiner »Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme« (1879), S. 54.

und zwar ist jede der 20 Potenzaxen mit 3 Potenzpunkten und 3 Potenzebenen incident, jeder der 15 Potenzpunkte mit 4 Potenzaxen und 6 Potenzebenen, u. s. w.

2. Eine Configuration n_i in der Ebene besteht aus n Punkten und n Geraden in solcher Lage, dass jede der n Geraden i von den n Punkten enthält und durch jeden der n Punkte i von den n Geraden gehen. Durch jede collineare oder reciproke Transformation verwandelt n_i sich wiederum in eine Cf. n_i ; von letzterer können vier Punkte oder Gerade willkürlich in der Ebene angenommen werden, wenn $n > 3$ ist. Collineare Configurationen sehen wir als nicht wesentlich verschieden an. — Jedes einfache n -eck oder n -seit bildet eine Cf. n_3 , ebenso jede Gruppe von ebenen Polygonen, welche zusammen n Eckpunkte haben. Ein sich selbst eingeschriebenes n -eck bildet eine Cf. n_3 , zwei sich wechselseitig eingeschriebene n -ecke bilden eine $2n_3$. Reelle Configurationen S_3 existiren nicht; dagegen hat Herr S. Kantor⁽¹⁾ drei verschiedenartige Configurationen 9_3 und zehn verschiedene 10_3 nachgewiesen. Die bekanntesten derselben sind der ebene Schnitt 10_3 eines vollständigen räumlichen Fünfecks⁽²⁾ und die Cf. 9_3 , welcher die Eckpunkte eines zwei Geraden eingeschriebenen Sechsecks und die Schnittpunkte seiner drei Paar Gegenseiten angehören.

3. Eine räumliche Configuration n_i besteht aus n Punkten und n Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der n Ebenen i von den n Punkten enthalten sind und durch jeden der n Punkte i von den n Ebenen gehen; wir bezeichnen diese Cf. genauer mit (n_i, g_k) , wenn zu ihr noch g Gerade gehören, die mit je k der n Punkte und je k der n Ebenen incident sind. Die Kummer'sche Cf. (1.) ist demnach mit 16_6 oder aber mit $(16_6, 120_2)$ zu bezeichnen, die Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln gehören zu einer Cf. $(12_6, 16_3)$ und die Potenzebenen, Potenzpunkte und Potenzaxen von sechs Kugeln bilden eine Cf. $(15_6, 20_3)$. Beliebige n Strahlen einer Regelschaar bestimmen mit n ihrer Leitstrahlen die n^2 Punkte und n^2 Ebenen einer Cf. $(n^2_{2n-1}, 2n_n)$, z. B. einer $(9_5, 6_3)$, wenn $n = 3$ ist; ebenso bestimmt eine Schläfli'sche Doppelsechse eine sie enthaltende Cf. $(30_5, 12_5)$. Die zwölf Eckpunkte eines regulären Ikosaëders bilden mit den zwölf Diagonalebene, in welchen je fünf Kanten liegen, eine Cf. $(12_5, 60_2)$; dieselbe

⁽¹⁾ Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Jahrg. 1881, Nov. und Decbr.

⁽²⁾ Vgl. darüber meine »Geometrie der Lage« II, 2 Aufl., S. 69.

lässt sich ebenso einfach aus dem regulären Dodekaëder ableiten und wird durch eines der regulären Polyëder von Poinso't dargestellt.

4. Die Configuration (n_i, g_k) verwandelt sich durch jede collineare oder reciproke Transformation wiederum in eine Cf. (n_i, g_k) ; von letzterer können, wenn $n > 4$ ist, fünf Punkte oder fünf Ebenen beliebig angenommen werden. Sind zwei reciproke Configurationen (n_i, g_k) in einem Nullsysteme einander zugeordnet, so bilden sie zusammen eine Cf. $(2n_{i+1}, 2g_k)$, indem jede Ebene derselben auch durch ihren Nullpunkt geht und jeder ihrer Punkte in seiner Nullebene liegt. Auf diese Art erhält man aus dem Tetraëder eine Cf. 8_4 , aus dieser wiederum eine 16_5 , u. s. w. Aus gewissen räumlichen Configurationen kann man durch die Methode des Projicirens und Schneidens complicirtere ebene Cff. ableiten. Projicirt man z. B. die Punkte und Geraden einer Cf. $(12_6, 16_3)$ aus einem beliebigen Punkte auf eine Ebene ε , mit welcher man zugleich die Geraden und Ebenen der Cf. zum Durchschnitt bringt, so erhält man in ε eine ebene Cf. 28_4 ; ebenso ergibt sich aus der Potenz-Cf. $(15_6, 20_3)$ von sechs Kugeln eine ebene Cf. 35_4 , und aus dem Tetraëder die oben (3.) erwähnte Cf. 10_3 .

5. Das Problem der Configurationen nun verlangt, dass alle verschiedenartigen, zu den Zahlen n und i gehörigen Configurationen n_i ermittelt und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht werden. Der erste Theil dieser Aufgabe ist bislang nur für die ebenen Configurationen 9_3 und 10_3 , und zwar von Herrn S. Kantor a. a. O. gelöst worden. Von der Kummer'schen Cf. 16_6 hat Herr F. Klein eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften aufgedeckt;⁽¹⁾ ihre Beziehungen zu Thetafunctionen mit zwei Variablen sind durch die Herren Cayley, Borchardt und H. Weber bekannt.⁽²⁾ Von der Cf. $(12_6, 16_3)$, deren Untersuchung von den Herren Giuseppe Veronese und Cyparissos Stephanos nach verschiedenen Richtungen erfolgreich begonnen wurde,⁽³⁾ enthält der folgende Aufsatz wesentliche Eigenschaften. Offenbar aber bleibt auf diesem Gebiete noch

⁽¹⁾ F. Klein in den Mathem. Annalen II, S. 199—226.

⁽²⁾ Cayley in Crelle-Borchardt's Journal 83 S. 210 und 84 S. 238; Borchardt ebenda 83 S. 234; H. Weber ebenda 84 S. 332. — Vgl. Krazzer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen, Lpz. 1882.

⁽³⁾ Stephanos im Bulletin des sciences math. et astron., 2^e série T. III, 1879; Veronese in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81.

viel zu thun übrig. So ist die Frage nach den algebraischen Gleichungen, mit welchen die Configurationen zusammenhängen, unseres Wissens noch von Niemand in Angriff genommen worden. Hervorzuheben ist auch die Frage, durch wie viele ihrer Elemente (Punkte, Gerade und Ebenen) eine beliebige Configuration bestimmt ist und wie sie sich bewegt, wenn eines der sie bestimmenden Elemente seine Lage stetig ändert. Dass die Kummer'sche Cf. 16_6 durch sechs ihrer Punkte bestimmt ist und ihre Theorie mit derjenigen des räumlichen Sechsecks sehr innig zusammenhängt, ist bekannt.⁽¹⁾

Strassburg ¹/E den 16 Sept. 1882.

⁽¹⁾ Vgl. meine »Geometrie der Lage« II, 2 Aufl. S. 250—259 und Crelle-Borchardt's Journal 86 S. 84 und 209.

DIE HEXAÄDER- UND DIE OCTAÄDER- CONFIGURATIONEN $(12_6, 16_3)$

VON

TH. REYE

IN STRASSBURG i/E.

1. Die Configuration $(12_6, 16_3)$, welche zuerst bei den Aehnlichkeitspunkten von vier Kugeln bemerkt wurde,⁽¹⁾ steht in engen Beziehungen zum Fünfflach und zum räumlichen Fünfeck. Einerseits nämlich bilden die sechs Punkte, in welchen die Kanten eines Tetraäders Δ von einer Ebene ε geschnitten werden, mit denjenigen sechs Punkten, welche von ihnen durch je zwei Eckpunkte harmonisch getrennt sind, die 12 Punkte einer Cf. $(12_6, 16_3)$; die 12 Ebenen derselben bestehen aus den vier Tetraöderflächen, der Ebene ε und den sieben Ebenen ε' , welche von ε durch je zwei Gegenelemente des Tetraäders harmonisch getrennt sind. Andererseits bilden die sechs Ebenen, durch welche die Kanten eines Tetraäders Δ_1 aus einem Punkte P projecirt werden, mit denjenigen sechs Ebenen, welche von ihnen durch je zwei Tetraöderflächen harmonisch getrennt sind, die 12 Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, und zwar bestehen deren 12 Punkte aus den vier Eckpunkten von Δ_1 , dem Punkte P und den sieben Punkten P' , welche von P durch je zwei Gegenelemente des Tetraäders harmonisch getrennt sind. Wenn P sich bewegt, so beschreiben die acht Punkte P' und P acht collineare, involutorisch liegende Räume. Zwei so construirte Configurationen $(12_6, 16_3)$ können collinear oder reciprok auf einander bezogen werden, indem man die sie bestimmenden

⁽¹⁾ Vgl. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, p. 409.

Tetraëder und Punkte oder Ebenen als homologe Elemente einander zuweist; denn harmonische Gebilde gehen durch collineare oder reciproke Transformationen allemal wieder in harmonische Gebilde über. Wir wollen zunächst zeigen, dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ auf beide Arten construirt werden kann und dass folglich aus einer solchen Cf. alle übrigen durch collineare sowohl als auch durch reciproke Transformationen ableitbar sind.

2. Die drei Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$, welche durch eine ihrer 16 Geraden g gehen, enthalten zusammen alle 12 Cf.-Punkte, nämlich ausser den drei auf g liegenden noch je drei ausserhalb g befindliche. Zu der Cf. gehört folglich jede Ebene, welche eine Gerade und einen Punkt oder auch zwei Gerade der Cf. verbindet, ebenso aber jeder Punkt, in welchem eine Gerade und eine Ebene oder zwei Gerade der Cf. sich schneiden. Eine Ebene enthält deshalb höchstens vier Cf.-Gerade; dieselben müssen sich in ihren 6 Cf.-Punkten schneiden, und keine drei von ihnen gehen durch einen Punkt, weil sonst die Ebene mehr als sechs Cf.-Punkte enthalten würde. Jede Cf.-Ebene wird von mindestens zwölf Cf.-Geraden geschnitten, und zwar in jedem ihrer sechs Punkte von höchstens zwei, weil sonst durch den Punkt mehr als sechs Cf.-Ebenen gehen würden. Also liegen ausserhalb jeder Cf.-Ebene genau zwölf Cf.-Gerade und in ihr vier Gerade und sechs Punkte der Cf.; letztere bilden zusammen ein vollständiges Vierseit, in dessen Eckpunkten die Ebene von je zwei der übrigen 12 Geraden geschnitten wird. Ebenso gehen durch jeden Punkt der Cf. vier Gerade und sechs Ebenen derselben, und zwar bilden dieselben ein vollständiges Vierkant, dessen Ebenen je zwei der übrigen 12 Cf.-Geraden projiciren.

3. Zwei beliebige Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ schneiden sich entweder in einer Cf.-Geraden oder in einer »Diagonale« der Cf., welche zwei und nur zwei Punkte derselben verbindet; denn jede Cf.-Gerade der einen Ebene hat mit der andern einen Cf.-Punkt gemein (2.). Jede Cf.-Ebene schneidet folglich acht der 11 übrigen paarweise in ihren vier Cf.-Geraden und die drei letzten Cf.-Ebenen in den drei Diagonalen ihres Cf.-Vierseits; sie bildet mit diesen letzteren drei Cf.-Ebenen ein Tetraëder Δ , dessen Kanten aus sechs Diagonalen der Cf. bestehen. Da die drei Diagonalen eines Vierseits sich gegenseitig harmonisch theilen, so sind die 12 Punkte der Cf. paarweise harmonisch getrennt durch die Eckpunkte des Tetraëders Δ ; sie können folglich auf die oben (1.) zuerst angegebene Art construirt

werden mittelst des Tetraëders Δ und irgend einer der übrigen acht Cf.-Ebenen ε . Die 12 Ebenen der Cf. ($12_6, 16_3$) bilden drei verschiedene Tetraëder Δ , deren 18 Kanten durch je zwei der 12 Cf.-Punkte harmonisch getheilt werden. Jede Fläche eines beliebigen dieser Tetraëder schneidet die Flächen und Kanten der beiden anderen paarweise in vier Geraden und sechs Punkten der Cf., und jede Kante desselben schneidet zwei paar Gegenkanten der andern in zwei Cf.-Punkten. Die drei Tetraëder Δ bilden demnach ein »desmisches System«, ⁽¹⁾ und je zwei von ihnen liegen auf vierfache Art perspectiv bezüglich der vier Ebenen des dritten. Durch die 16 Cf.-Geraden geht ein Büschel von Flächen vierter Ordnung, welche die 12 Cf.-Punkte zu Doppelpunkten haben; drei dieser Flächen zerfallen in die Ebenen der drei Tetraëder Δ .

4. Auf analoge Weise bilden die 12 Punkte der Cf. ($12_6, 16_3$) drei Tetraëder Δ_1 , durch deren Flächen die Ebenen der Cf. paarweise harmonisch getrennt sind. Aus jedem derselben und einem der übrigen acht Cf.-Punkte P kann die Cf. auf die zweite der angegebenen Arten (1.) construirt werden; jedes dieser drei Δ_1 ist folglich Poltetraëder von doppelt unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche den beiden andern umschrieben werden können. Aus jedem Eckpunkte eines beliebigen dieser drei Δ_1 werden die Eckpunkte und Kanten der beiden übrigen paarweise durch vier Gerade und sechs Ebenen der Cf. projecirt; je zwei der drei Tetraëder Δ_1 liegen demnach perspectiv bezüglich der Eckpunkte des dritten. Die drei Δ_1 haben wie die drei Δ die 18 Diagonalen der Cf. zu Kanten und bilden gleichfalls ein desmisches System; jedes Δ_1 hat mit jedem Δ zwei Gegenkanten gemein. Die 24 Eckpunkte, 24 Ebenen und 18 Kanten der sechs Tetraëder Δ und Δ_1 bilden die von Herrn Viëtor ⁽²⁾ untersuchte »harmonische« Cf. ($24_6, 18_4$), deren 18 Geraden mit je vier harmonischen Punkten und je vier harmonischen Ebenen derselben incident sind.

5. Als Repräsentant der Configurationen ($12_6, 16_3$) kann die Würfelconfiguration betrachtet werden, welche ausser den 8 Eckpunkten, 12

⁽¹⁾ Nach der Ausdrucksweise des Herrn Cyparissos Stephanos im Bulletin des sciences math. et astr., 2^e série t. III, 1879. Veronese (Sopra alcune notevoli configurazioni... in den Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1880—81) nennt sie »tetraedri fasciali«.

⁽²⁾ Viëtor in den Berichten über d. Verhdlgn. d. naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. VIII. 2, 1882.

Kanten und 6 Flächen eines Würfels noch dessen Mittelpunkt M , die durch M gehenden 4 Diagonalen und 6 Diagonalebenen und die drei unendlich fernen Kantenpunkte enthält (Fig. 1). Die drei Tetraëder Δ dieser Cf. werden gebildet von je zwei parallelen Flächen und den beiden zu ihnen normalen Diagonalebenen des Würfels. Die drei unendlich fernen Kantenpunkte bilden mit M das eine der drei Tetraëder Δ_1 ; die beiden anderen werden von je vier Eckpunkten gebildet, die auf den quadratischen Würfelflächen einander gegenüber liegen, und ihre Kanten sind die 12 Diagonalen dieser 6 Quadrate (Fig. 2). — Die Configurationen $(12_6, 16_3)$ werden auch repräsentirt durch diejenige des regulären Octaëders, welche aus dessen 8 Flächen, 12 Kanten und 6 Eckpunkten, den 3 Diagonalebenen, der unendlich fernen Ebene und den unendlich fernen 6 Punkten und 4 Geraden der Kanten und Flächen besteht (Fig. 3). Wir bezeichnen die $(12_6, 16_3)$ als Hexaëder- oder Octaëder-Configurationen, weil sie sowohl collinear als auch reciprok in diejenigen des Würfels und des regulären Octaëders transformirt werden können (1.).

6. Die 12 Flächen der drei Tetraëder Δ_1 einer Würfelconfiguration gehören zu der Cf. $(12_6, 16_3)$ eines regulären Octaëders, welches die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen zu Eckpunkten hat (Fig. 2); sie bilden die drei mit jenen Δ_1 identischen Tetraëder Δ dieser Octaëderconfiguration, aus welcher ganz ebenso wieder die Würfelconfiguration abgeleitet werden kann. Ueberhaupt gehört zu jeder Cf. $(12_6, 16_3)$ eine andere ihr dreifach um- und eingeschriebene, so dass die Tetraëder Δ oder Δ_1 der ersteren mit den Tetraëdern Δ_1 resp. Δ der letzteren identisch sind, also durch jeden Punkt der einen drei Ebenen der andern Cf. gehen und in jeder Ebene der einen drei Punkte der andern liegen. Die 24 Punkte und 24 Ebenen von zwei so zusammengehörigen Configurationen bilden mit ihren 18 Diagonalen, d. h. mit den 18 Kanten ihrer Tetraëder Δ und Δ_1 wiederum die harmonische Configuration $(24_9, 18_4)$. Letztere sowie jede der beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ ist sich selbst zugeordnet in den 24 centrisch-involutorischen Systemen, welche je einen Eckpunkt der Tetraëder Δ und Δ_1 zum Involutioncentrum und die gegenüberliegende Ebene zur Involutionsebene haben.

7. Um zwei Configurationen $(12_6, 16_3)$ reciprok auf einander zu beziehen, kann man fünf Punkten P der einen, von welchen die vier ersten eines ihrer Tetraëder Δ_1 bilden, beziehungsweise fünf Ebenen ε der

ändern, von welchen die vier ersten ein Tetraëder Δ derselben bilden, als entsprechende zuweisen (1.). Da nun die letztere Cf. drei Tetraëder Δ enthält und jedes derselben durch 24 Permutationen seiner 4 Ebenen ε darstellbar ist, ausserdem aber die fünfte Ebene ε der Cf. acht verschiedene Lagen annehmen kann, so ergibt sich: Zwei beliebige Configurationen ($12_6, 16_3$) können auf $3 \cdot 24 \cdot 8 = 576$ verschiedene Arten reciprok und ebenso oft collinear auf einander bezogen werden.⁽¹⁾ — Eine Cf. ($12_6, 16_3$) ist in zwölf verschiedenen Nullsystemen sich selbst zugeordnet; man erhält zwei derselben, wenn man irgend zwei sich schneidenden Cf.-Geraden diejenigen beiden zu ihnen windschiefen zuordnet, deren Schnittpunkt in der Ebene der ersteren liegt. Um diese 12 Nullsysteme übersichtlich darstellen zu können, bezeichnen wir die Punkte und Ebenen der Cf. auf folgende Art.

8. Sei $iklm$ irgend eine Permutation von 1 2 3 4. Wir bezeichnen dann die Punkte der Cf. ($12_6, 16_3$) durch die zwölf Ziffernpaare ik , und von ihren Ebenen vier durch die Ziffern $i = 1, 2, 3, 4$, die übrigen acht durch die Ternen ikl oder deren cyclische Permutationen, und zwar so, dass die drei Tetraëder Δ_i von den Punktenquadrupeln:

$$12\ 21\ 34\ 43, 13\ 24\ 31\ 42 \text{ und } 14\ 23\ 32\ 41$$

gebildet werden, die drei Tetraëder Δ aber von den Ebenenquadrupeln:

$$1\ 2\ 3\ 4, 234\ 143\ 124\ 132 \text{ und } 432\ 134\ 142\ 123.$$

Die Punkte ik, il, im liegen in einer Cf.-Geraden (vgl. Fig. 1 und 2); ebenso die Punkte ik, li, mi . Die sechs Punkte:

ik, il, im, ki, li, mi liegen in der Ebene i , und

ik, il, im, lm, mk, kl liegen in der Ebene $klm = lmk = mkl$;

die sechs Ebenen i, ikl, ikm, k, klm, kml gehen demnach durch den Punkt ik . Von den 18 Diagonalen $\overline{ik\ ki}$ und $\overline{ik\ lm}$ der Cf. schneiden sich $\overline{ik\ ki}, \overline{kl\ lk}$ und $\overline{li\ il}$ in einem Eckpunkte der drei Tetraëder Δ , ebenso $\overline{ik\ lm}, \overline{kl\ im}$ und $\overline{li\ km}$; der letztere Eckpunkt liegt der Ebene lki und der erstere der Ebene m gegenüber, beide sind in Fig. 3 ebenso bezeichnet wie diese ihre Gegenebenen. Die Schemata:

⁽¹⁾ Dieser und der folgende Satz wurden bereits von Herrn Victor, welchem ich sie vor $1\frac{1}{2}$ Jahren mittheilte, a. a. O. veröffentlicht.

ki	kl	km	und	ki	kl	km
lk	li	lm		lk	il	ml
mk	ml	mi		mk	lm	im

repräsentiren die 9 Cf.-Punkte, welche ausserhalb der Geraden $\overline{ik\ il\ im}$ resp. $\overline{ik\ li\ mi}$ liegen, zugleich aber durch ihre 3 Zeilen und 3 Spalten diejenigen sechs Cf.-Geraden, welche diese resp. Geraden nicht schneiden. Die 9 Punkte, 6 Geraden und 9 Ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$, welche mit einer beliebigen Cf.-Geraden nicht incident sind, liegen hiernach in einer Fläche zweiten Grades und bilden eine Cf. $(9_6, 6_3)$.

9. Die zwölf Nullsysteme A_i, B_i, C_i , in welchen die Configuration $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist, lassen sich nun durch folgende Tabelle darstellen:

	1	2	3	4	234	143	124	132	432	134	142	123
A_1	12	21	34	43	13	24	31	42	14	23	32	41
A_2	21	12	43	34	42	31	24	13	32	41	14	23
A_3	12	21	43	34	14	23	41	32	13	24	42	31
A_4	21	12	34	43	23	14	32	41	24	13	31	42
B_1	13	24	31	42	14	23	32	41	12	21	34	43
B_2	31	42	13	24	23	14	41	32	43	34	21	12
B_3	13	42	31	24	12	43	34	21	14	41	32	23
B_4	31	24	13	42	34	21	12	43	32	23	14	41
C_1	14	23	32	41	12	21	34	43	13	24	31	42
C_2	41	32	23	14	34	43	12	21	24	13	42	31
C_3	14	32	23	41	13	31	24	42	12	34	21	43
C_4	41	23	32	14	42	24	31	13	43	21	34	12

Aus derselben ist ersichtlich, dass z. B. in dem Nullsysteme C_3 den Ebenen 1, 2, 3, 4, 234,, 123 die resp. in ihnen liegenden Punkte 14, 32, 23, 41, 13,, 43 zugeordnet sind, und folglich den vier Geraden 21 24 23, 12 31 41, 34 42 14, 43 13 32 die resp. Geraden 34 31 32, 43 24 14, 21 13 41, 12 42 23, während die übrigen acht

Cf.-Geraden in C_3 sich selbst zugeordnet sind. In jedem der zwölf Nullsysteme sind acht Cf.-Gerade sich selbst und die übrigen acht paarweise einander zugeordnet. Die beiden Nullsysteme eines jeden der sechs Paare:

$$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4$$

stehen zu einander in solcher Wechselbeziehung, dass die acht Cf.-Geraden, welche in einem von ihnen paarweise einander zugeordnet sind, acht sich selbst zugeordnete »Leitstrahlen« des andern bilden (vgl. 13.).

10. Die vier Nullsysteme A_i sind paarweise involutorisch und bestimmen zu zweien sechs geschaart-involutorische Systeme A_iA_k und zu dreien vier räumliche Polarsysteme $A_iA_lA_m$,⁽¹⁾ in welchen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist. Nämlich die Nullpunkte oder Pole einer beliebigen Ebene und die Nullebenen eines jeden Punktes bezüglich der Systeme A_i , A_k oder A_l , A_l , A_m sind einander zugeordnet in dem involutorischen Systeme A_iA_k resp. conjugirt in dem Polarsysteme $A_kA_lA_m$. Das involutorische System A_2A_3 z. B. enthält die Punktenpaare 12 21. 42 14. 31 23. 24 41. 13 32 und seine Involutionenachsen gehen durch 34 und 43; das Polarsystem $A_2A_3A_4$ hat die beiden Poltetraëder 14 23 42 31 und 41 32 24 13 und seine Ordnungsfläche enthält die Schaar gemeinschaftlicher Leitstrahlen der Nullsysteme A_2 , A_3 , A_4 und die drei paar Involutionenachsen von A_3A_4 , A_4A_2 und A_2A_3 , insbesondere auch die Leitstrahlen 12 21 und 34 43; durch letztere und durch die Involutionenachsen von A_2A_3 geht auch die Ordnungsfläche des Polarsystems $A_1A_2A_3$, von welchem 14 32 42 13 und 41 23 24 31 zwei Poltetraëder sind. Die involutorischen Systeme A_iA_k und A_lA_m bestimmen zusammen das System $A_1A_2A_3A_4$, von welchem 12 21 und 34 43 die Involutionenachsen und 13 31, 14 41, 23 32, 24 42 vier Punktenpaare sind, und ebenso bestimmen von den drei Systemen A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 (resp. A_3A_4 , B_3B_4 , C_3C_4) je zwei das dritte; nämlich je zwei Punkte, welche in zwei dieser Systeme einem beliebigen Punkte zugeordnet sind, sind in dem dritten Systeme einander zugeordnet. Durch die letzteren beiden Gruppen von je drei Systemen werden die Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ zu vierten so gruppirt:

$$12\ 21\ 34\ 43, 13\ 42\ 31\ 24, 14\ 32\ 41\ 23;$$

⁽¹⁾ Vgl. F. Klein, Math. Annalen II S. 199—226 und meine »Geometrie der Lage« II, 2 Aufl., S. 256.

diese drei Quadrupel Δ_1 sowie die 3 Tetraëder Δ sind Poltetraëder eines räumlichen Polarsystems, in welchem die Cf. $(12_6, 16_3)$ der zu ihr gehörigen Cf. $(12_6, 16_3)$ zugeordnet ist, und dessen imaginäre Ordnungsfläche die Involutionenachsen der zweimal drei Systeme und die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der einen und der anderen Gruppe enthält (vgl. 16.).

11. Die zwölf Nullsysteme A_i, B_i, C_i bilden die folgenden neun Gruppen von je vier involutorischen Nullsystemen:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 A_4, & A_1 A_2 B_3 B_4, & A_1 A_2 C_3 C_4, & B_1 B_2 A_3 A_4, & B_1 B_2 B_3 B_4, \\ & B_1 B_2 C_3 C_4, & C_1 C_2 A_3 A_4, & C_1 C_2 B_3 B_4, & C_1 C_2 C_3 C_4. \end{aligned}$$

Von jeder dieser Gruppen gilt dasselbe, was soeben von $A_1 A_2 A_3 A_4$ bemerkt wurde; ein beliebiges der zwölf Nullsysteme liegt also mit sieben anderen involutorisch. Die 12 Nullsysteme bestimmen demnach zu zweien $\frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ und zu vierten 9, im Ganzen also 51 geschaart-involutorische Systeme, zu dreien aber $9 \cdot 4 = 36$ Polarsysteme, in denen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet ist. Neun der 51 involutorischen Systeme haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder Δ_1 zu Involutionenachsen, sechs andere mit imaginären Axen werden durch das Schema der Punktenpaare:

$$ik \ ki. \quad lm \ ml. \quad il \ mk. \quad li \ km. \quad im \ lk. \quad mi \ kl$$

dargestellt und die übrigen 36 durch das Schema:

$$ik \ ik. \quad ki \ ki. \quad lm \ ml. \quad mk \ kl. \quad lk \ km. \quad mi \ il. \quad li \ im.$$

Die Ordnungsflächen der 36 Polarsysteme sind alle reell und geradlinig; durch je zwei Gegenkanten der 3 Tetraëder Δ_1 gehen vier von ihnen (10.). Wählt man von zwei dieser Tetraëder je zwei Eckpunkte, wie 12 21 und 13 24, deren Verbindungslinien sich nicht schneiden, so bilden diese und die übrigen vier Eckpunkte zwei Poltetraëder 12 21 13 24 und 34 43 31 42 von einem der 36 Polarsysteme (vgl. 10.). Andere Polarsysteme, in welchen die Cf. $(12_6, 16_3)$ sich selbst zugeordnet wäre, existiren nicht.

12. Die gemeinschaftlichen Leitstrahlen der drei Nullsysteme A_1, B_1, C_1 bilden keine Regelschaar, sondern eine lineare Congruenz $A_1 B_1 C_1$, welche die vier windschiefen Cf.-Geraden

$$12 \ 13 \ 14, \ 21 \ 24 \ 23, \ 34 \ 31 \ 32, \ 43 \ 42 \ 41$$

enthält und durch dieselben bestimmt ist. Die drei Nullsysteme liegen folglich in einem Büschel, d. h. die drei Nullpunkte einer beliebigen Ebene liegen in einer Geraden und die drei Nullebenen eines jeden Punktes

gehen durch eine Gerade der Congruenz. Uebrigens sind durch diese 3 Nullsysteme die Punkte und Ebenen des Raumes in Tripeln einander zugeordnet, wie 12, 13, 14 und 1, 234, 432 oder 21, 24, 23 und 2, 143, 134, sodass die Nullpunkte der drei Ebenen eines Tripels in drei cyclischen Permutationen das zugeordnete Punktripel bilden. Ganz das Gleiche gilt von den Nullsystemen der acht Tripel:

$$A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_2B_1C_2, A_2B_2C_1; A_3B_3C_1, A_3B_4C_4, A_4B_1C_1, A_4B_4C_4,$$

wie aus der obigen Tabelle ersichtlich ist. Die Nullpunkte einer Ebene in den drei paar Nullsystemen $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ bilden folglich die drei paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten den vier Congruenzen $A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_2B_1C_2, A_2B_2C_1$ angehören; ebenso bilden ihre Nullpunkte bezüglich der übrigen sechs Nullsysteme ein vollständiges Vierseit und die Nullebenen eines beliebigen Punktes ein vollständiges Vierkant. Durch die sechs Nullsysteme $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes zu Hexaëder-Configurationen ($12_6, 16_3$) gruppirt, deren 16 Geraden zu vieren den erwähnten vier Congruenzen angehören. Jeder Ebene einer solchen Cf. sind in den 6 Nullsystemen die 6 in ihr liegenden Cf.-Punkte zugeordnet, ferner in den 4 Tripeln $A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_2B_1C_2, A_2B_2C_1$ die vier paar anderen durch ihre Cf.-Geraden gehenden Cf.-Ebenen, und in den 3 involutorischen Systemen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 die noch übrigen drei Cf.-Ebenen. Analoges gilt von jedem Punkte einer solchen Cf. Durch die sechs Nullsysteme $A_3B_3C_3A_4B_4C_4$ werden die Punkte und Ebenen des Raumes ebenfalls zu Hexaëder-Configurationen gruppirt, die aber von den vorigen verschieden sind.

13. Die acht linearen Congruenzen der eben besprochenen Tripel werden durch folgende Tabelle übersichtlich dargestellt:

	$A_3 B_3 C_3$	$A_3 B_4 C_4$	$A_4 B_3 C_4$	$A_4 B_4 C_3$
$A_1B_1C_1$	12 13 14	21 24 23	34 31 32	43 42 41
$A_1B_2C_2$	21 42 32	12 31 41	43 24 14	34 13 23
$A_2B_1C_2$	43 31 23	34 42 14	21 13 41	12 24 32
$A_2B_2C_1$	34 24 41	43 13 32	12 42 23	21 31 14

Die vier Geraden, welche mit einem der Tripel ABC in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind, bestimmen die zugehörige lineare Congruenz. Zugleich ist aus der Tabelle ersichtlich, welche acht Cf.-Geraden in jedem

der zwölf Nullsysteme sich selbst und welche acht paarweise einander zugeordnet sind (9.); z. B. in C_1 sind die Geraden der ersten und der vierten Reihe ($A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_1$) sich selbst und die übereinander stehenden der zweiten und dritten Reihe einander zugeordnet, in A_4 dagegen sind die Geraden der dritten und vierten Spalte ($A_4B_3C_4$ und $A_4B_4C_3$) sich selbst und die nebeneinander stehenden der ersten und zweiten Spalte einander zugeordnet. Jede der 16 Cf.-Geraden schneidet nur diejenigen sechs anderen nicht, welche mit ihr in derselben Zeile oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind. Welche Ebene einem beliebigen Cf.-Punkte in jedem der 12 Nullsysteme zugeordnet ist, lehrt auch diese Tabelle; z. B. dem Punkte 12 ist in B_4 und zugleich in C_2 die Ebene 124 der Geraden 12 31 41 und 12 24 32 zugeordnet, weil letztere von B_4 und C_2 zwei Leitstrahlen sind.

14. Welche von den 18 Kanten der Tetraëder Δ und Δ_1 in jedem der 12 Nullsysteme sich selbst, und welche einander zugeordnet sind, ersieht man aus folgender Tabelle:

	A_3	B_3	C_3	
A_1	12 21, 34 43	14 32, 41 23	13 42, 31 24	A_2
B_1	14 23, 41 32	13 31, 24 42	12 43, 21 34	B_2
C_1	13 24, 31 42	12 34, 21 43	14 41, 23 32	C_2
	A_4	B_4	C_4	

Jedes der Nullsysteme A_i , B_i , C_i hat diejenigen drei paar Tetraëderkanten zu Leitstrahlen, welche mit ihm in derselben Zeile oder Spalte verzeichnet sind; die übrigen 12 Kanten sind paarweise einander zugeordnet, und zwar in A_1 , B_1 oder C_1 die übereinander, in A_2 , B_2 oder C_2 die übereinander stehenden, z. B. in C_1 die Kanten 12 21 und 14 23, 34 43 und 41 32, cet. und in C_2 die Kanten 12 21 und 41 32, 34 43 und 14 23, 14 32 und 24 42, cet. Ebenso sind in A_3 die Kanten 14 32 und 13 42, 41 23 und 31 24, 13 31 und 12 43 cet. einander zugeordnet, in A_4 dagegen 14 32 und 31 24, 41 23 und 13 42 u. s. w. — Von den neun Paaren Gegenkanten der Tetraëder Δ_1 schneidet ein jedes nur diejenigen vier Kantenpaare nicht, welche mit ihm in einer Reihe oder Spalte der Tabelle verzeichnet sind; diese vier paar Gegenkanten aber liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung, weil vier der 8 Kanten die übrigen

vier schneiden. Bezüglich der neun Flächen zweiter Ordnung, welche hiernach durch je acht der 18 Tetraëderkanten gehen, ist die Cf. $(12_6, 16_3)$ der zu ihr gehörigen Cf. $(12_6, 16_3)$ und die aus beiden gebildete harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ sich selbst zugeordnet.

15. Es giebt sechs und nur sechs Nullsysteme, in welchen eine Cf. $(12_6, 16_3)$ der zu ihr gehörigen Cf. und folglich jedes ihrer Tetraëder Δ_1 und Δ sich selbst zugeordnet ist; man erhält eines derselben, wenn man zwei windschiefen Tetraëderkanten ihre Gegenkanten zuordnet. Die letzte Tabelle (14.) repräsentirt auch diese sechs Nullsysteme, indem jede ihrer 3 Zeilen und 3 Spalten von einem der Nullsysteme drei Paare einander zugeordneter Geraden aufweist; die übrigen 12 Kanten sind Leitstrahlen desselben. — Wir wollen mit (ik) die Ebene bezeichnen, welche in einem der Tetraëder Δ_1 dem Eckpunkte ik gegenüberliegt, sodass also (ik) die drei Punkte ki , lm und ml verbindet und in ik die drei Ebenen (ki) , (lm) und (ml) sich schneiden. Die sechs neuen Nullsysteme können dann auch folgendermassen übersichtlich dargestellt werden:

	(12) (21) (34) (43)	(13) (24) (31) (42)	(14) (23) (32) (41)
A_1A_2	21 12 43 34	42 31 24 13	32 41 14 23
B_1B_2	43 34 21 12	31 42 13 24	23 14 41 32
C_1C_2	34 43 12 21	24 13 42 31	41 32 23 14
A_3A_4	21 12 43 34	24 13 42 31	23 14 41 32
B_3B_4	34 43 12 21	31 42 13 24	32 41 14 23
C_3C_4	43 34 21 12	42 31 24 13	41 32 23 14

Denn z. B. in dem Nullsysteme C_1C_2 sind den Ebenen (12) , (21) , (34) , (43) , (13) , $\dots\dots$, (41) die resp. in ihnen liegenden Punkte 34, 43, 12, 21, 24, $\dots\dots$, 14 zugeordnet. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die sechs Nullsysteme involutorisch sind; sie bestimmen zu zweien fünfzehn geschaart-involutorische Systeme und zu dreien zehn Polarsysteme, und zwar ganz dieselben, wie die in gleicher Weise bezeichneten involutorischen Systeme (10.). Beispielsweise bestimmen A_1A_2 und B_3B_4 das involutorische System $A_1A_2B_3B_4$, dagegen A_1A_2 und B_1B_2 das System C_1C_2 . Neun von den 15 involutorischen Systemen haben je zwei Gegenkanten der Tetraëder Δ_1 zu Involutionsachsen (10., 11.), die Axen der sechs übrigen sind imaginär (10.).

16. Drei beliebige von diesen sechs Nullsystemen bestimmen zu-

sammen dasselbe Polarsystem wie die drei übrigen; z. B. die Nullsysteme B_1B_2 , C_1C_2 und A_3A_4 liefern ebenso wie B_3B_4 , C_3C_4 und A_1A_2 das Polarsystem, von welchem 12 21 34 43 ein Poltetraëder ist und dessen Ordnungsfläche durch die acht Kanten:

$$31\ 24, 13\ 42, 14\ 32, 41\ 23; 31\ 42, 13\ 24, 14\ 23, 41\ 32$$

der übrigen beiden Tetraëder \mathcal{A}_1 geht. Von den zehn Polarsystemen hat das durch A_1A_2 , B_1B_2 und C_1C_2 bestimmte die drei \mathcal{A}_1 und die drei \mathcal{J} zu Poltetraëdern und seine Ordnungsfläche ist imaginär; die Ordnungsflächen der neun übrigen sind reell und gehen durch je vier paar Gegenkanten der \mathcal{A}_1 (vgl. 14.). Jede dieser 10 Ordnungsflächen ist ihre eigene Polare bezüglich der neun übrigen, weil in einem beliebigen der 10 Polarsysteme die 18 Tetraëderkanten theils sich selbst theils ihren Gegenkanten zugeordnet sind. — Durch die 6 Nullsysteme, 10 Polar- und 15 involutorischen Systeme sind, wie Herr F. Klein a. a. O. zuerst bemerkt hat, die Punkte und Ebenen des Raumes nach Kummer'schen Configurationen (16_6 , 120_2) gruppiert, deren 120 Geraden aus je acht Leitstrahlen der 15 involutorischen Systeme bestehen.

17. Ausser den soeben nachgewiesenen 10 Polarsystemen giebt es nur noch zweimal zwölf andere, in welchen die zusammengehörigen beiden Cff. (12_6 , 16_3) einander zugeordnet sind. Durch je sechs Punkte der einen oder der andern Cf., welche ausserhalb einer Ebene ε der Cf. liegen, geht die Ordnungsfläche von einem dieser 24 Polarsysteme; dieselbe berührt in den sechs Punkten paarweise die 12 Kanten von zwei Tetraëdern \mathcal{A} der Cf. und hat das dritte \mathcal{A} , welchem ε angehört, zum Poltetraëder. Bei der Cf. des regulären Octaëders z. B. ist die dem Octaëder umschriebene Kugel eine der 24 Ordnungsflächen (Fig. 2 und 3). Diese 24 Flächen sind alle reell, enthalten aber keine reellen Geraden. — Wir haben also eine Gruppe von 24 und eine von 10 Flächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Cff. (12_6 , 16_3) zu einander, und ausserdem eine Gruppe von 36 Flächen, in Bezug auf welche sie zu sich selbst polar sind. Die Flächen einer jeden dieser drei Gruppen sind bezüglich einer beliebigen der 70 Flächen theils zu sich selbst theils paarweise zu einander polar. Die harmonische Cf. (24_3 , 18_4) ist, wie sich beweisen lässt, nur bezüglich dieser 70 Flächen zweiter Ordnung zu sich selbst polar, und in keinem anderen Nullsysteme als den 18 oben angegebenen sich selbst zugeordnet.

Strassburg $\frac{1}{2}$ E, den 22 Oct. 1882.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE (x, y) .⁽¹⁾

PAR

P. APPELL

à PARIS.

I. *Sur les fonctions uniformes d'une variable x .*

1. Soit $f(x)$ une fonction uniforme de la variable x ayant un nombre fini de points singuliers a_1, a_2, \dots, a_n . Dans le domaine du point singulier a_k , cette fonction est représentée par une série convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_{\nu}^{(k)} (x - a_k)^{\nu}; \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

pour les valeurs de x dont le module surpasse le plus grand des modules des nombres a_1, a_2, \dots, a_n , cette même fonction est représentée par la série

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_{\nu} \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}.$$

Théorème I. *Les nombres $A_{-1}^{(k)}$ et A_1 satisfont à la relation*

$$(1) \quad A_1 = \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}.$$

⁽¹⁾ La plupart des résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 13 mars 1882.

En effet l'intégrale $\int f(x) dx$ prise dans le sens positif le long d'une circonférence ayant pour centre le point $x = 0$ et entourant les n points a_1, a_2, \dots, a_n est égale à $2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}$; et, si l'on pose $x = \frac{1}{x'}$, cette même intégrale se réduit à l'intégrale

$$-\int f\left(\frac{1}{x'}\right) \frac{dx'}{x'^2}$$

prise dans le sens négatif sur une circonférence entourant le seul point singulier $x' = 0$, intégrale qui est égale à $2\pi i A_1$.

Remarque. La décomposition d'une fonction rationnelle $R(x)$ en fractions simples résulte immédiatement de l'application du théorème I à la fonction de ξ

$$R(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0} \right]$$

2. Soient C_1, C_2, \dots, C_n n cercles se coupant ou non, ayant pour centres respectifs les points a_1, a_2, \dots, a_n . Appelons espace E la portion du plan des x extérieure à la fois à tous ces cercles; la ligne L qui limite cet espace E consiste en une ou plusieurs courbes fermées composées d'arcs de cercle. Désignons par $\varphi(x)$ une fonction de x uniforme dans l'espace E et n'ayant dans cet espace aucun point singulier. (Nous supposons par conséquent que le point $x = \infty$ n'est pas un point singulier de $\varphi(x)$).

Théorème II. La fonction $\varphi(x)$ est développable en une série de la forme

$$(2) \quad \varphi(x) = A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{v=1}^{v=\infty} A_v^{(k)} \frac{1}{(x - a_k)^v}$$

convergente en tous les points de l'espace E .

Pour démontrer ce théorème, considérons l'intégrale

$$\int \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0} \right] d\xi$$

prise sur le contour L dans un sens tel que l'espace E soit à gauche du

point décrivant ξ , les points x et x_0 étant deux points quelconques de l'espace E . On voit immédiatement que cette intégrale est égale à

$$2\pi i [\varphi(x) - \varphi(x_0)]$$

Comme le contour d'intégration L se compose d'arcs appartenant aux circonférences C_1, C_2, \dots, C_n , l'on aura

$$(3) \quad 2\pi i [\varphi(x) - \varphi(x_0)] = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0} \right] d\xi,$$

l'indice C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise le long des arcs de la circonférence C_k qui appartiennent à la ligne L . Pour toutes les valeurs de ξ telles que

$$(4) \quad \text{mod. } (\xi - a_k) < \varepsilon_k \text{ mod. } (x - a_k), \quad \varepsilon_k < 1$$

la fonction $\frac{1}{\xi - x}$ de la variable ξ est développable en une série uniformément convergente

$$(5) \quad \frac{1}{\xi - x} = - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a_k)^{\nu-1}}{(x - a_k)^{\nu}}$$

Or les valeurs que prend ξ dans l'intégrale affectée de l'indice C_k satisfont à l'inégalité (4); en remplaçant, dans cette intégrale, $\frac{1}{\xi - x}$ par le développement (5), la relation (3) devient la formule (2) où l'on fait

$$A = \varphi(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} \varphi(\xi) \frac{1}{\xi - x_0} d\xi$$

$$A_{\nu}^{(k)} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\xi) (\xi - a_k)^{\nu-1} d\xi$$

3. Le théorème précédent II est un cas particulier du suivant.

Théorème III. Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans l'espace à contour simple ou multiple situé à l'extérieur de n cercles de centres a_1, a_2, \dots, a_n

et à l'intérieur de m cercles de centres b_1, b_2, \dots, b_m est développable, dans cette portion du plan, en une série convergente de la forme:

$$\zeta(x) = C + \sum_{h=1}^h \sum_{\nu=1}^m \sum_{\epsilon=1}^{\infty} B_{\nu}^{(\epsilon h)} (x - b_h)^{\epsilon} + \sum_{k=1}^k \sum_{\nu=1}^n \sum_{\epsilon=1}^{\infty} A_{\nu}^{(\epsilon k)} (x - a_k)^{\epsilon}$$

Ce théorème conduit à la démonstration donnée par M. Bourguet de l'expression

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k \left(\frac{1}{x - a_k} \right) + G(x)$$

indiquée par M. Weierstrass pour une fonction uniforme ayant n points singuliers a_1, a_2, \dots, a_n à distance finie et un point singulier à l'infini. Il suffit pour cela de supposer que les cercles de centres a_1, a_2, \dots, a_n aient des rayons infiniment petits, que le nombre m soit égal à 1 et que le cercle correspondant ait un rayon infini.

Remarque. Les développements en série de fractions rationnelles qui font l'objet des § 2—3 conduisent à des conséquences intéressantes que j'ai indiquées dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Séance du premier mai 1882).

II. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) .

4. Soit

$$(6) \quad F(x, y) = 0$$

une équation algébrique irréductible représentant une courbe d'ordre m et de genre p . Je suppose que, par une substitution linéaire l'on ait fait en sorte que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique pour la fonction algébrique y de la variable x ; alors, quand x croît indéfiniment, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers m valeurs finies distinctes c_1, c_2, \dots, c_m .

J'appelle, comme il est d'usage de le faire, point analytique (x, y) le système formé par une valeur quelconque attribuée à x et par une des m valeurs correspondantes de y . Une fonction de la variable x sera dite *fonction uniforme du point analytique* (x, y) si cette fonction reprend la même valeur lorsque le point (x, y) décrit un cycle quelconque.

Soit (a, b) un point analytique non critique; j'appelle *domaine* δ du point (a, b) l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant du point (a, b) , x restant assujetti à la condition

$$\text{mod. } (x - a) \leq \delta.$$

Si le point a est à l'infini on remplacera dans cette définition $x - a$ par $\frac{1}{x}$.

Soit (a, b) un point critique; les valeurs de y qui deviennent égales à b pour $x = a$ se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires. J'appelle *domaine* δ du point (a, b) *relatif à un de ces systèmes circulaires* l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b) avec une des valeurs de y appartenant à ce système circulaire, x restant assujetti à la condition

$$\text{mod. } (x - a) \leq \delta.$$

5. *Pôles et points singuliers essentiels.* — Soit (a, b) un point analytique non critique; il existe un domaine δ du point (a, b) dans lequel il n'y a pas de point critique. Une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique (x, y) sera, dans ce domaine, une *fonction uniforme de* x . Si cette fonction uniforme de x est régulière au point a , nous dirons que la fonction $f(x, y)$ du point analytique est régulière au point (a, b) . Si, au contraire, cette même fonction uniforme de x admet le point a pour pôle ou pour point singulier essentiel, nous dirons que le point analytique (a, b) est un pôle ou un point singulier essentiel de $f(x, y)$.

Lorsque la fonction $f(x, y)$ est régulière au point (a, b) , l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha} A_{\nu}(x - a)^{\nu};$$

lorsque le point (a, b) est un pôle de $f(x, y)$, l'on a dans un certain domaine $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{\nu=\alpha} A_{\nu}(x - a)^{\nu};$$

le nombre positif entier α est appelé *degré* du pôle (a, b) et le coefficient

A_{-1} résidu relatif à ce pôle. Enfin, lorsque le point (a, b) est un point singulier essentiel de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine $\delta' < \delta$ du point (a, b) dans lequel il n'y a plus ni pôles ni points singuliers essentiels, on a, dans ce domaine δ'

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\nu}(x-a)^{\nu};$$

dans ce cas, le point singulier essentiel sera dit *point singulier essentiel isolé*, et le coefficient A_{-1} sera appelé *résidu* de la fonction $f(x, y)$ relatif au point (a, b) .

Dans les définitions précédentes il faut remplacer $(x-a)$ par $\frac{1}{x}$ quand $a = \infty$.

Supposons maintenant que (a, b) soit un point critique de la fonction algébrique y de x et considérons un système circulaire de q racines y_1, y_2, \dots, y_q se permutant autour de ce point. Si l'on fait

$$(7) \quad x = a + x'^q,$$

ces q racines sont, dans un certain domaine du point (a, b) relatif au système circulaire considéré, représentées par le même développement en série

$$(8) \quad y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_{\nu} x'^{\nu}.$$

Remplaçons, dans la fonction $f(x, y)$, x et y par les expressions (7) et (8); $f(x, y)$ deviendra une fonction de la variable x' uniforme dans un certain domaine du point $x' = 0$. Nous dirons que la branche de la fonction $f(x, y)$ relative au système circulaire considéré est régulière au point (a, b) , admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel suivant que la fonction uniforme de x' que nous venons de définir est régulière au point $x' = 0$, admet ce point pour pôle ou pour point singulier essentiel.

Lorsque la branche considérée de la fonction $f(x, y)$ est régulière au point (a, b) , on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_{\nu} x'^{\nu};$$

lorsque le point (a, b) est un pôle pour cette branche, on a, dans un certain domaine du point $x' = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\alpha}^{+\infty} A_{\nu} x'^{\nu};$$

le nombre entier positif α sera appelé degré du pôle, et le produit $qA_{-\alpha}$ sera appelé résidu de la branche considérée de la fonction relatif au pôle (a, b) .

Lorsque le point (a, b) est un point singulier essentiel pour cette branche de la fonction $f(x, y)$ et qu'en outre il existe un domaine δ du point (a, b) relatif au système circulaire considéré tel que, dans ce domaine, il n'y ait plus ni pôle ni point singulier essentiel de $f(x, y)$, on a, pour cette branche, le développement

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{\nu} x'^{\nu}$$

valable dans un certain domaine du point $x' = 0$. Dans ce cas le point (a, b) est appelé *point singulier essentiel isolé* pour la branche considérée, et le produit $qA_{-\alpha}$ est appelé *résidu* relatif à ce point.

Il faut remarquer que, si dans les développements précédents suivant les puissances de x' , on remplace x' par sa valeur $(x - a)^{\frac{1}{r}}$ tirée de (7), le coefficient de $\frac{1}{x - a}$ est précisément $A_{-\alpha}$. Nous introduisons le facteur q dans la définition du résidu pour donner aux théorèmes un énoncé général s'appliquant à la fois aux points critiques et aux points non critiques.

Fonctions ayant un nombre fini de points singuliers.

6. On a d'abord le théorème suivant:

Une fonction uniforme du point analytique (x, y) qui n'a d'autres points singuliers que des pôles est une fonction rationnelle de x et y .

(Voir Briot, Théorie des fonctions abéliennes, Note B.)

7. Voici maintenant la généralisation du théorème I § 1.

Théorème IV. Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme du point analytique (x, y) ayant un nombre fini de points singuliers $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ et soient R_1, R_2, \dots, R_n les résidus relatifs à ces points; soit de plus dans un certain domaine du point analytique $(x = \infty, \lim \frac{y}{x} = c_k)$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu}, \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

on a la relation

$$(9) \quad A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \dots + A_1^{(n)} = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

Pour démontrer cette relation, il suffit d'appliquer le théorème I à la fonction uniforme de x

$$f_1(x) = f(x, y_1) + f(x, y_2) + \dots + f(x, y_m),$$

y_1, y_2, \dots, y_m désignant les m valeurs de y qui répondent à la valeur x .

Il est évident que $f_1(x)$ est une fonction uniforme de x ayant les n points singuliers a_1, a_2, \dots, a_n . Supposons, pour prendre le cas le plus général, que le point singulier (a_k, b_k) soit un point critique autour duquel se permutent q racines y_1, y_2, \dots, y_q . On a, dans un certain domaine de ce point,

$$f(x, y_1) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

désignons par ω une racine primitive de l'équation binôme

$$\omega^q - 1 = 0.$$

Si la variable x fait le tour du point a_k , y_1 devient y_2 et $(x - a_k)^{\frac{1}{q}}$ est multiplié par ω ; donc

$$f(x, y_2) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^\nu (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

On a de même

$$f(x, y_3) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{2\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}};$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f(x, y_q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \lambda_\nu \omega^{(q-1)\nu} (x - a_k)^{\frac{\nu}{q}}.$$

Si nous faisons la somme de ces q développements

$$f(x, y_1) + f(x, y_2) + \dots + f(x, y_q),$$

nous voyons que les termes qui contiennent $(x - a_k)$ élevé à une puissance fractionnaire disparaissent et que le coefficient de $\frac{1}{x - a_k}$ est $q\lambda_{-q}$, c'est à dire le résidu R_k . Ainsi la fonction uniforme $f_1(x)$ admet le point singulier a_k avec le résidu R_k .

D'autre part dans le domaine du point ∞ on a

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu};$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans ce développement est

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \dots + A_1^{(m)}.$$

Donc en appliquant à la fonction $f_1(x)$ la relation (1) on obtient précisément la relation à démontrer (9).

Remarque I. Si une fonction uniforme du point (x, y) qui a un nombre fini de points singuliers n'a pas de points singuliers à l'infini et devient en chacun des m points analytiques éloignés indéfiniment infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$ ou d'un ordre supérieur, la somme des résidus de cette fonction est nulle. En effet, dans cette hypothèse, les m nombres $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_1^{(m)}$ sont nuls; donc

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = 0.$$

Remarque II. Dans le cas particulier où la fonction $f(x, y)$ est rationnelle en x et y , la relation (9) est l'expression analytique de ce théorème de Riemann que la somme des résidus logarithmiques de l'intégrale d'une fonction algébrique est nulle.

8. Avant de poursuivre cette étude, rappelons quelques propriétés des intégrales Abéliennes dont il sera fait usage plus loin.

Désignons par

$$(10) \quad u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi_i(x, y) dx \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

les p intégrales Abéliennes normales de première espèce, et par $\theta(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ou plus simplement $\theta(u_i)$ une des fonctions θ correspondantes.

L'intégrale Abélienne normale de troisième espèce qui admet les deux points critiques logarithmiques $(\xi, \eta), (\xi', \eta')$ est

$$H_{(\xi, \eta)}^{(\xi', \eta')} = \text{Log.} \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i] \cdot \theta[-u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i] \cdot \theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}$$

où

$$h_i = c_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k), \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les $(p-1)$ points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{p-1}, y_{p-1})$ étant arbitraires. La fonction $H_{(\xi, \eta)}^{(\xi', \eta')}$ ne dépend en aucune façon du choix de ces $(p-1)$ points. (Voir: Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris par M. Emmanuel le 5 juillet 1879, p. 21 et suivantes.)

La dérivée de l'intégrale de troisième espèce $H_{(\xi, \eta)}^{(\xi', \eta')}$ par rapport à ξ est indépendante de (ξ', η') et des $(p-1)$ points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{p-1}, y_{p-1})$. Désignons cette dérivée changée de signe par $Z(\xi, \eta)$:

$$(11) \quad Z(\xi, \eta) = -\frac{dH_{(\xi, \eta)}^{(\xi', \eta')}}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi} \cdot \text{Log} \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ est l'intégrale Abélienne normale de seconde espèce qui est finie pour toutes les valeurs de (x, y) excepté pour $x = \xi, y = \eta$; en ce point elle devient infinie du premier ordre et son résidu est égal à l'unité. Cette même fonction $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y) et (x_0, y_0) , ces derniers avec des résidus -1 et $+1$. Cela résulte de la forme du second membre de l'équation (11) ou du théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième

espèce. (Voir Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* p. 120 et suiv.). Je rappelle enfin que la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point (x, y) admet p périodes qui sont

$$\varphi_1(\xi, \eta), \quad \varphi_2(\xi, \eta), \quad \dots \quad \varphi_p(\xi, \eta)$$

la fonction φ_i étant la fonction rationnelle qui figure dans l'expression (10) de l'intégrale de première espèce $u^{(i)}(x, y)$.

Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ joue dans les recherches suivantes sur les fonctions du point analytique (x, y) le même rôle que la fonction

$$\frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}$$

dans les recherches sur les fonctions uniformes de x . (§ 1, 2 et 3.) Si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ les m valeurs de η qui répondent à une valeur attribuée à ξ dans l'équation $F(\xi, \eta) = 0$, on a

$$Z(\xi, \eta_1) + Z(\xi, \eta_2) + \dots + Z(\xi, \eta_m) = \frac{1}{x - \xi} - \frac{1}{x_0 - \xi}.$$

Si le point (ξ, η) coïncide avec un point critique, les théorèmes précédents subissent des modifications que je n'indiquerai pas ici.

9. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y ; la formule de Roch analogue à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 294) s'obtient immédiatement en appliquant le théorème IV (relation (9)) à la fonction rationnelle de (ξ, η)

$$(12) \quad R(\xi, \eta) \cdot Z(\xi, \eta).$$

Je vais le montrer ici en supposant pour plus de simplicité que la fonction $R(x, y)$ soit régulière aux m points analytiques éloignés indéfiniment et en tous les points critiques. Soient alors

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$$

les n pôles de $R(x, y)$, le pôle (a_k, b_k) étant d'ordre s_k . Dans un certain domaine du point (a_k, b_k) on a

$$R(x, y) = \frac{A_1^{(k)}}{x - a_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{(x - a_k)^{s_k}} + B_0^{(k)} + B_1^{(k)}(x - a_k) + \dots$$

Cela posé, la fonction rationnelle (12) de ξ et η admet les n pôles (a_k, b_k) de $R(\xi, \eta)$, et les pôles de $Z(\xi, \eta)$ qui sont les points critiques et les points (x, y) , (x_0, y_0) . Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle (a_k, b_k) est

$$A_1^{(k)}Z(a_k, b_k) + A_2^{(k)} \cdot Z'(a_k, b_k) + \frac{A_3^{(k)}}{1.2} \cdot Z''(a_k, b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2 \dots (s_k - 1)} \cdot Z^{(s_k - 1)}(a_k, b_k),$$

en désignant par $Z^{(s)}(a, b)$ la dérivée d'ordre s de $Z(\xi, \eta)$ par rapport à ξ dans laquelle on a remplacé (ξ, η) par (a, b) . Le résidu de la fonction (12) relatif au pôle (x, y) est $-R(x, y)$, et le résidu relatif au pôle (x_0, y_0) est $R(x_0, y_0)$. La fonction $Z(\xi, \eta)$ a encore des pôles aux points critiques, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$(13) \quad \int Z(\xi, \eta) d\xi$$

reste finie aux points critiques. De plus la fonction rationnelle (12) est régulière aux m points analytiques à l'infini et elle est en chacun de ces points infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{\xi^2}$, car l'intégrale (13) reste finie à l'infini. Donc, d'après la remarque I du § (7) la somme des résidus de la fonction (12) est nulle; ce qui donne la formule de Roch

$$(14) \quad R(x, y) = R(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \left[A_1^{(k)}Z(a_k, b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2 \dots (s_k - 1)} Z^{(s_k - 1)}(a_k, b_k) \right]$$

Puisque le second membre de cette formule est une fonction rationnelle de x et y , ses périodes sont nulles; ce qui donne les p relations connues

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{k=n} \left[A_1^{(k)}\varphi_i(a_k, b_k) + A_2^{(k)}\varphi'_i(a_k, b_k) + \dots + \frac{A_{s_k}^{(k)}}{1.2 \dots (s_k - 1)} \cdot \varphi_i^{(s_k - 1)}(a_k, b_k) \right] = 0$$

où

$$i = 1, 2, \dots, p.$$

Ces relations (15) peuvent d'ailleurs être démontrées directement en appliquant le théorème IV du § 7 aux p fonctions rationnelles

$$R(\xi, \eta)\varphi_i(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

10. Proposons-nous maintenant de trouver l'expression la plus générale d'une fonction uniforme $f(x, y)$ du point analytique (x, y) partout régulière excepté au point singulier essentiel (a, b) .

Dans un certain domaine du point singulier (a, b) on a

$$(17') \quad f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu}.$$

Considérons la fonction du point (ξ, η)

$$(16) \quad f(\xi, \eta)Z(\xi, \eta);$$

cette fonction admet un point singulier essentiel à savoir le point (a, b) et le résidu relatif à ce point est égal à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\dots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b);$$

tel est en effet le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de $(\xi-a)$. Cette même fonction admet les pôles (x, y) et (x_0, y_0) avec les résidus $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; elle admet aussi pour pôles les points critiques avec des résidus nuls; enfin elle devient aux m points analytiques à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{\xi^2}$. En appliquant à cette fonction (16) le théorème IV, Remarque I, on a

$$(17) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\dots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b).$$

Telle est l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. La série qui sert à définir la fonction (17) est convergente tant que le point analytique (x, y) est distinct du point (a, b) . En effet quand le point (x, y) est distinct du point (a, b) on peut toujours développer la fonction (16) en une série ordonnée suivant les puissances de $(\xi-a)$ convergente dans un certain domaine du point (a, b) . Dans ce qui suit nous désignerons par $G(x, y | a, b)$ la fonction uniforme la plus générale du point (x, y)

qui admet un seul point singulier, à savoir le point singulier essentiel (a, b) ; une pareille fonction est représentée par la série (17).

Dans les raisonnements précédents on a supposé le point (a, b) différent d'un point critique. Dans le cas où le point (a, b) coïnciderait avec un point critique autour duquel se permutent q racines formant un système circulaire, on ferait d'abord la substitution

$$\xi = a + \xi'^q, \quad \eta = b + \eta';$$

et on égalerait à $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ le coefficient de $\frac{1}{\xi'^q}$ dans le développement de la fonction (16) suivant les puissances de ξ' .

Les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_\infty$ qui figurent dans les développements (17) et (17') satisfont aux p relations suivantes:

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a, b)}{1.2 \dots (\nu-1)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$\varphi_i^{(\nu-1)}(x, y)$ désignant la dérivée d'ordre $(\nu - 1)$ de $\varphi_i(x, y)$ par rapport à x . Les relations (18) résultent de ce que les périodes de la fonction (17) sont nulles; on les démontre directement en appliquant le théorème IV, (Remarque I) aux p fonctions

$$f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

11. Les considérations employées dans le paragraphe précédent permettent d'obtenir de la même façon l'expression la plus générale d'une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant les n points singuliers $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$. Nous supposons, pour plus de simplicité, que ces n points sont à distance finie et qu'aucun d'eux ne coïncide avec un point critique. Soit $f(x, y)$ la fonction cherchée; dans un certain domaine du point singulier (a_k, b_k) , cette fonction est développable en une double série de la forme

$$(19) \quad f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{(x - a_k)^\nu}.$$

Considérons la fonction uniforme du point (ξ, η)

$$(20) \quad f(\xi, \eta) \cdot Z(\xi, \eta).$$

Cette fonction admet comme points singuliers: 1° les n points (a_k, b_k) comme points singuliers essentiels, 2° les deux points (x, y) et (x_0, y_0) comme pôles, 3° les points critiques comme pôles. Le résidu de la fonction (20) relatif au point (a_k, b_k) est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2 \dots (\nu-1)} \cdot Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k);$$

les résidus de cette même fonction relatifs aux pôles (x, y) et (x_0, y_0) sont $-f(x, y)$ et $f(x_0, y_0)$; enfin les résidus relatifs aux points critiques sont nuls. Comme on peut appliquer à cette fonction la remarque I du théorème IV, on a la relation

$$(21) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2 \dots (\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k);$$

ce qui donne l'expression cherchée de la fonction $f(x, y)$. On voit que cette expression est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y \mid a_k, b_k),$$

les fonctions G_k étant des fonctions telles que (17).

Les coefficients $A_\nu^{(k)} \left(\begin{smallmatrix} k=1, 2, \dots, n \\ \nu=1, 2, \dots, \infty \end{smallmatrix} \right)$ satisfont aux p relations

$$(22) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{\varphi_i^{(\nu-1)}(a_k, b_k)}{1.2 \dots (\nu-1)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

que l'on obtient en appliquant encore le théorème IV aux p fonctions

$$f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

12. L'on peut généraliser les théorèmes exposés dans les § 2 et 3 de la façon suivante.

Voici d'abord la généralisation du théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction de x holomorphe dans l'intérieur d'un cercle de centre a en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(x - a)$.

Théorème V. Soit (a, b) un point non critique et δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait pas de point critique;

soit de plus $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière en tous les points analytiques situés **en dehors** du domaine δ du point (a, b) . Cette fonction est développable en une série de la forme

$$(23) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_{\nu} Z^{(\nu-1)}(a, b)$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs au domaine δ .

En effet, soient (x, y) et (x_0, y_0) deux points analytiques situés à l'extérieur du domaine δ du point (a, b) ; considérons un domaine ρ du point (x, y) et un domaine ρ_0 du point (x_0, y_0) n'empiétant pas l'un sur l'autre ni sur δ et ne contenant pas de points critiques. L'on a l'équation

$$(24) \quad \int_{\rho} f(\xi, \eta) \cdot Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{\rho_0} f(\xi, \eta) \cdot Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{\delta} f(\xi, \eta) \cdot Z(\xi, \eta) d\xi = 0,$$

les indices ρ, ρ_0, δ indiquant que les intégrales qui en sont affectées sont prises dans le sens positif sur les circonférences limitant les domaines ρ, ρ_0 et δ . Pour démontrer l'équation (24) traçons dans le plan des x les lacets de première espèce et les m circuits. (Voir Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, p. 180, fig. 58.) Nous pouvons toujours tracer ces lacets et ces circuits de façon qu'ils ne pénètrent pas dans les domaines ρ, ρ_0, δ , et que ces trois domaines soient dans l'intérieur de la circonférence des circuits. Cela posé, prenons l'intégrale

$$(25) \quad \int f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi$$

sur le contour fermé constitué par la droite ol , la circonférence du circuit dans le sens positif (le sens de la flèche sur la fig. 58), la droite lo , et enfin la suite des lacets $\dots a_4, a_3, a_2, a_1$ jusqu'au point 0. Comme on peut parcourir ce contour fermé en prenant successivement au départ chacune des m racines $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ correspondant à la valeur initiale de ξ , l'on obtient m valeurs de l'intégrale (25) sur le contour indiqué; je dis que la somme de ces m valeurs est nulle. D'abord, dans chaque intégrale, la partie relative à la circonférence du circuit est nulle, car à l'extérieur de cette circonférence chacune des branches de la fonction intégrée est holomorphe et développable en une série convergente de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_{\nu} \cdot \frac{1}{\xi^{\nu}};$$

puis, les portions d'intégrale relatives aux droites ol et lo se détruisent. Il reste donc à montrer que la somme des intégrales prises sur les lacets est nulle; or cela résulte de ce que la somme des q intégrales relatives aux q lacets d'un système circulaire de q racines se permutant autour d'un point critique est égale à zéro. (La démonstration est la même que celle que donnent M.M. Briot et Bouquet pour l'intégrale d'une fonction rationnelle, voir Théorie des fonctions elliptiques p. 174.) Il est d'ailleurs évident que la somme des m valeurs considérées de l'intégrale (25) est égale au premier membre de l'équation (24); donc ce premier membre est nul, et la relation (24) est démontrée. La première des intégrales (24) est égale à

$$- 2\pi i f(x, y),$$

la deuxième à

$$+ 2\pi i f(x_0, y_0).$$

On a donc l'équation

$$(26) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi,$$

qui est une équation fondamentale pour la théorie des fonctions d'un point analytique. Dans le cas présent la fonction $Z(\xi, \eta)$ du point (ξ, η) est une fonction holomorphe de ξ dans un domaine $\delta' > \delta$ du point (a, b) ; elle est donc développable dans ce domaine en une série uniformément convergente par la formule de Mac-Laurin

$$(27) \quad Z(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(\xi - a)^{\nu}}{1.2..\nu} \cdot Z^{(\nu)}(a, b).$$

Portant ce développement (27) dans la formule (26) on a la formule à démontrer (23) dans laquelle

$$(28) \quad A_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{1.2..(\nu-1)} \cdot \int_{\gamma} (\xi - a)^{\nu-1} f(\xi, \eta) d\xi.$$

13. Le théorème V démontré dans le § précédent peut être généralisé de la façon suivante,

Théorème VI. Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ des points non critiques et $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ des nombres positifs tels que, dans le domaine δ_k du point (a_k, b_k) , il n'y ait pas de point critique; soit de plus $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière en tous les points analytiques **situés à la fois en dehors** de tous les domaines δ_k des points (a_k, b_k) . Cette fonction est développable en une série de la forme

$$(29) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_{\nu}^{(k)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k)$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs à la fois à tous les domaines δ_k .

La démonstration de ce théorème est en tout semblable à la précédente et repose sur l'équation

$$(30) \quad \int_p f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \int_{\rho_0} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi + \sum_{k=1}^{k=n} \int_{\delta_k} f(\xi, \eta) Z(\xi, \eta) d\xi = 0$$

qui est analogue à l'équation (24) et que l'on établit de la même façon.

Ces développements en série conduisent, pour les fonctions d'un point analytique (x, y) à des conséquences analogues à celles que j'ai indiquées pour les fonctions d'une variable x . (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, Séance du 1^{er} Mai 1882.) Je me réserve d'étudier cette question dans une autre circonstance.

14. *Fonctions ayant une infinité de points singuliers.* — Voici, pour ces fonctions, la généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler.

Théorème VII. Soient une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_\nu, b_\nu), \dots$$

tels que

$$\lim (a_\nu, b_\nu) = (a, b), (\nu = \infty);$$

soient, d'autre part

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_\nu(x, y), \dots$$

une suite de fonctions rationnelles de x et y ne devenant infinies respectivement qu'aux deux points (a_ν, b_ν) et (a, b) ; il existe une fonction uniforme $\Phi(x, y)$ du point analytique (x, y) n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point (a, b) et admettant pour pôles les points (a_ν, b_ν) de telle façon que la différence

$$\Phi(x, y) = f_v(x, y)$$

soit régulière au point (a_v, b_v) .⁽¹⁾

Supposons que le point (a, b) ne coïncide pas avec un point critique. Soit ε un nombre réel positif moindre que l'unité, et δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait ni un point critique, ni le point initial arbitraire (x_0, y_0) limite inférieure des intégrales Z .

Les points (a_v, b_v) situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) sont en nombre fini; parmi ces points se trouvent d'ailleurs les points (a_v, b_v) qui coïncident avec des points critiques. Formons la somme des fonctions $f_v(x, y)$ en nombre fini correspondant à ces points (a_v, b_v) situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ et désignons cette somme par $\Psi_1(x, y)$.

Considérons maintenant les points (a_v, b_v) en nombre infini situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) ; dans ce qui suit nous désignerons plus spécialement ces points par (a_v, b_v) et par $f_v(x, y)$ les fonctions rationnelles correspondantes. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $\Psi(x, y)$ possédant à l'égard de ces points la propriété indiquée par le théorème. Pour avoir alors la fonction cherchée $\Phi(x, y)$, il suffira de prendre

$$\Phi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi(x, y).$$

Avant de commencer la démonstration, il importe d'abord de former l'expression analytique de la fonction rationnelle donnée $f_v(x, y)$ qui a un pôle au point (a_v, b_v) et un autre pôle au point (a, b) . Supposons que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi'_1(a, b) & \varphi''_1(a, b) & \dots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi'_2(a, b) & \varphi''_2(a, b) & \dots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \varphi_p(a, b) & \varphi'_p(a, b) & \varphi''_p(a, b) & \dots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

(1) Lors d'une visite que j'ai faite à Berlin au mois de Juillet de l'année 1882, M. WEIERSTRASS m'a appris qu'il était depuis longtemps en possession de ce théorème et d'autres dans le même genre. Un mémoire du grand géomètre sur les fonctions que M. APPELL nomme *fonctions uniformes d'un point analytique*, paraîtra prochainement dans les »Acta».

soit différent de zéro. Dans le domaine du point (a_ν, b_ν) la fonction rationnelle $f_\nu(x, y)$ est développable en une série de la forme

$$f_\nu(x, y) = \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{(x - a_\nu)^{n_\nu}} + \frac{A_{n_\nu-1}^{(\nu)}}{(x - a_\nu)^{n_\nu-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\nu)}}{x - a_\nu} + A_0^{(\nu)} + \dots$$

$A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \dots, A_{n_\nu}^{(\nu)}$ étant des constantes connues. Posons alors

$$(31) \quad \begin{aligned} \psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = & A_1^{(\nu)} Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)} Z'(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2 \dots (n_\nu - 1)} Z^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta) \\ & + B_1^{(\nu)} Z(a, b) + B_2^{(\nu)} Z'(a, b) + \dots + B_p^{(\nu)} Z^{(p-1)}(a, b), \end{aligned}$$

les nombres $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots, B_p^{(\nu)}$ étant déterminés par les p équations du premier degré

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & B_1^{(\nu)} \varphi_i(a, b) + B_2^{(\nu)} \varphi'_i(a, b) + \dots + B_p^{(\nu)} \varphi_i^{(p-1)}(a, b) \\ & + A_1^{(\nu)} \varphi_i(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)} \varphi'_i(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1.2 \dots (n_\nu - 1)} \varphi_i^{(n_\nu-1)}(\xi, \eta) = 0 \end{aligned} \right.$$

$i = 1, 2, \dots, p$

équations qui expriment que la fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est rationnelle en x et y . Ces équations (32) donnent pour $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots, B_p^{(\nu)}$ des expressions linéaires par rapport aux fonctions

$$\varphi_i(\xi, \eta), \quad \varphi'_i(\xi, \eta), \quad \dots, \quad \varphi_i^{(p-1)}(\xi, \eta);$$

ces coefficients $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \dots, B_p^{(\nu)}$ sont donc des fonctions rationnelles de (ξ, η) n'ayant d'autres pôles que les points critiques. En remplaçant ces coefficients par leurs valeurs dans l'expression (31) on obtient pour $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ une fonction rationnelle de x et y n'ayant d'autres pôles que les points (ξ, η) et (a, b) ; cette même fonction $\psi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction rationnelle de (ξ, η) n'ayant d'autres pôles que les points critiques, le point (x, y) et le point (x_0, y_0) . La différence

$$f_\nu(x, y) - \psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est une fonction rationnelle de (x, y) régulière au point (a_ν, b_ν) et n'ayant plus que le pôle (a, b) ; en désignant cette différence par $g_\nu(x, y)$ nous aurons

$$\psi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y).$$

Cela posé, soient

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots$$

des nombres positifs dont la somme est finie, et soit (ξ, η) un point situé dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) . Pour toutes les positions du point analytique (x, y) situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (\xi - a)$ du point (a, b) la fonction $\phi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $(\xi - a)$. En effet, cette fonction $\phi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) si le point (x, y) est situé en dehors du domaine δ de ce point, ou dans le domaine $\varepsilon \bmod (x - a)$ du point (a, b) si le point (x, y) est situé dans le domaine δ de ce point. Donc, si l'on fait, en particulier, $(\xi, \eta) = (a_\nu, b_\nu)$, on voit que, pour toutes les positions du point analytique situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point (a, b) , la fonction $\phi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $a_\nu - a$. Soit cette série

$$(33) \quad \phi_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \cdot \lambda_m^{(\nu)}(x, y);$$

les coefficients $\lambda_m^{(\nu)}(x, y)$ sont des fonctions rationnelles de x et y admettant le seul pôle (a, b) . En effet d'après la série de Taylor

$$\lambda_m^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2 \dots m} \left| \frac{d^m \phi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m} \right|_{(\xi, \eta) = (a, b)};$$

la dérivée $\frac{d^m \phi_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^m}$ est d'après la composition de ϕ_ν une fonction rationnelle de (x, y) ayant pour pôles les deux points (ξ, η) et (a, b) ; donc le coefficient $\lambda_m^{(\nu)}(x, y)$ obtenu en remplaçant dans cette dérivée (ξ, η) par (a, b) n'a plus qu'un pôle, à savoir le point (a, b) . Si nous posons

$$(34) \quad h_\nu(x, y) = \sum_{m=0}^{m=m_\nu} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

cette fonction $h_\nu(x, y)$ possède la même propriété d'avoir pour seul pôle le point (a, b) . En écrivant la série (33)

$$\phi_\nu(x, y | a_\nu, b_\nu) = h_\nu(x, y) + \sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

on peut déterminer le nombre m_ν de telle façon que pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$, le module de

$$\sum_{m=m_\nu+1}^{m=\infty} (a_\nu - a)^m \lambda_m^{(\nu)}(x, y)$$

soit au plus égal à ε_ν . Faisant alors

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, y) &= \phi_\nu(x, y | a_\nu, b_\nu) - h_\nu(x, y) \\ &= f_\nu(x, y) - g_\nu(x, y) - h_\nu(x, y) \end{aligned}$$

la série

$$\mathcal{V}(x, y) = \sum \Phi_\nu(x, y)$$

est absolument convergente et fournit la fonction cherchée $\mathcal{V}(x, y)$.

En effet, soit (x, y) une position quelconque du point (x, y) différente des points (a_ν, b_ν) et du point (a, b) . Il existe un entier ν' tel que pour $\nu \geq \nu'$ le point (x, y) soit constamment situé en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point (a, b) . Les points (a_ν, b_ν) dont l'indice est moindre que ν' sont en nombre fini, et par suite la somme des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ relatives à ces points est finie; quant aux points (a_ν, b_ν) tels que $\nu \geq \nu'$ leur nombre est infini, mais, d'après ce qui précède, on a pour tous ces points

$$\bmod \Phi_\nu(x, y) \leq \varepsilon_\nu,$$

et la somme des modules des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$ correspondantes est encore finie.

La différence $\mathcal{V}(x, y) - f_\nu(x, y)$ est régulière au point (a_ν, b_ν) d'après la forme même des fonctions $\Phi_\nu(x, y)$.

Nous avons supposé plus haut que le déterminant $\Delta(a, b)$ est différent de zéro. Si ce déterminant est nul, on remarque que l'un des déterminants

$$\Delta_k(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(k)}(a, b) & \varphi_1^{(k+1)}(a, b) & \dots & \varphi_1^{(k+p-1)}(a, b) \\ \varphi_2^{(k)}(a, b) & \varphi_2^{(k+1)}(a, b) & \dots & \varphi_2^{(k+p-1)}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_p^{(k)}(a, b) & \varphi_p^{(k+1)}(a, b) & \dots & \varphi_p^{(k+p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

où k prend successivement les valeurs 1, 2, 3 . . . etc., est différent de zéro. Car si tous ces déterminants étaient nuls, la fonction rationnelle

$$C_1\varphi_1(x, y) + C_2\varphi_2(x, y) + \dots + C_p\varphi_p(x, y)$$

où C_1, C_2, \dots, C_p sont des constantes convenables, s'annulerait au point (a, b) ainsi que toutes ses dérivées; ce qui est impossible. Alors si $\Delta_k(a, b) \geq 0$, il suffira, dans ce qui précède de remplacer $\phi(x, y | \xi, \eta)$ par la fonction

$$A_1^{(\nu)}Z(\xi, \eta) + A_2^{(\nu)}Z'(\xi, \eta) + \dots + \frac{A_{n_\nu}^{(\nu)}}{1, 2, \dots, (n_\nu - 1)} Z^{(n_\nu - 1)}(\xi, \eta) \\ + E_1^{(\nu)}Z^{(k)}(a, b) + E_2^{(\nu)}Z^{(k+1)}(a, b) + \dots + E_p^{(\nu)}Z^{(k+p-1)}(a, b);$$

la suite du raisonnement est identique.

15. Dans un prochain mémoire j'indiquerai la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme du point (x, y) ayant un seul point singulier essentiel et n'ayant pas de pôles. J'indiquerai en même temps quelques théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels, théorèmes qui se déduisent des précédents dans le cas de $p = 1$. (Voir au sujet des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels une Note de M. Picard, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, tome LXXXIX p. 852, et une Note que j'ai publiée récemment dans les Comptes Rendus de la Séance du 3 Avril 1882.)

Klingenthal, 2 Septembre 1882.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES D'UN POINT ANALYTIQUE (x, y) . (SECOND MÉMOIRE).

PAR

P. APPELL,

Maître de conférences à l'Ecole Normale.

Le présent mémoire constitue la suite d'un travail publié précédemment sous le même titre dans ce Journal. Il contient la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme d'un point analytique (x, y) ayant un seul point singulier essentiel, et une théorie des fonctions doublement périodiques avec des points singuliers essentiels. Je conserverai dans ce mémoire les notations employées dans le premier.

I. *Décomposition en facteurs primaires.*

Soient une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_\nu, b_\nu), \dots$$

tels que

$$\limite (a_\nu, b_\nu) = (a, b) \text{ pour } \nu = \infty,$$

et une suite de nombres positifs entiers

$$m_1, m_2, \dots m_\nu, \dots;$$

l'on peut former une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant pour point singulier essentiel le point (a, b) et pour zéros les points (a_ν, b_ν) aux degrés de multiplicité m_ν . ($\nu = 1, 2, \dots \infty$).

Pour le démontrer, supposons que le point (a, b) ne soit pas un point critique de la fonction algébrique y de x et que le déterminant

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a, b) & \varphi'_1(a, b) & \dots & \varphi_1^{(p-1)}(a, b) \\ \varphi_2(a, b) & \varphi'_2(a, b) & \dots & \varphi_2^{(p-1)}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_p(a, b) & \varphi'_p(a, b) & \dots & \varphi_p^{(p-1)}(a, b) \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Considérons la fonction

$$(1) \quad \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta) = \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ a, b \end{matrix} \right]^{m_\nu} e^{\lambda_1 Z(a, b) + \lambda_2 Z'(a, b) + \dots + \lambda_p Z^{(p-1)}(a, b)}$$

où l'on désigne par le symbole $\left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ a, b \end{matrix} \right]$ l'expression

$$(2) \quad \left[\begin{matrix} \xi, \eta \\ a, b \end{matrix} \right] = \frac{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(a, b) + h_i]} \cdot \frac{\theta[-u^{(i)}(a, b) + h_i]}{\theta[-u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]} = e^{H_{(a, b)}^{(\xi, \eta)}}.$$

Dans cette fonction (1) déterminons les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$ de telle façon que $\omega_\nu(x, y)$ soit une fonction uniforme du point (x, y) . Pour cela il suffit d'écrire que cette fonction ne change pas quand le point (x, y) décrit les p cycles correspondant aux p périodes de l'intégrale de deuxième espèce $Z(a, b)$. On a ainsi les p équations

$$(3) \quad m_\nu[u^{(i)}(\xi, \eta) - u^{(i)}(a, b)] + \lambda_1 \varphi_i(a, b) + \lambda_2 \varphi'_i(a, b) + \dots + \lambda_p \varphi_i^{(p-1)}(a, b) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ en fonction de (ξ, η) par ces équations (3); si l'on substitue les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ainsi obtenues dans la fonction (1), cette fonction devient une fonction uniforme du point (x, y) qui admet un seul zéro à savoir le point (ξ, η) et un seul point singulier à savoir le point singulier essentiel (a, b) .

Cela posé, soit δ un nombre positif tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait ni le point initial (x_0, y_0) limite inférieure des intégrales $u^{(i)}(x, y)$, ni un point critique de la fonction algébrique y de x . Désignons par ε un nombre positif plus petit que l'unité; les points

(a_ν, b_ν) qui sont situés en dehors du domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) sont en nombre fini; formons le produit des facteurs $\omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$ correspondant à ces points (a_ν, b_ν) situés hors du domaine $\varepsilon\delta$, et désignons ce produit par $\Pi_1(x, y)$. Portons maintenant notre attention sur les points (a_ν, b_ν) qui sont situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) et qui sont en nombre infini; dans ce qui suit nous désignerons plus spécialement ces points par (a_ν, b_ν) . Pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine

$$\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a),$$

la fonction

$$\text{Log } \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu)$$

est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$(4) \quad \text{Log } \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y).$$

En effet si le point (x, y) est en dehors du domaine δ de (a, b) , la fonction $\text{Log } \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine δ ; et si le point (x, y) est dans le domaine δ , cette même fonction est une fonction holomorphe de ξ dans le domaine $\varepsilon \bmod (x - a)$ du point (a, b) . Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots$ des nombres positifs dont la somme est finie; on pourra, d'après ce qui précède, déterminer un entier l_ν tel que le module de la somme

$$(5) \quad \sum_{\mu=l_\nu+1}^{+\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y) \dots \dots \dots$$

soit au plus égal à ε_ν pour toutes les positions du point (x, y) situées en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point (a, b) . Faisant alors

$$(6) \quad Z_\nu(x, y) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} (a_\nu - a)^\mu \rho_\mu^{(\nu)}(x, y)$$

on voit que le produit

$$(7) \quad \Pi_2(x, y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) \cdot e^{-\chi_\nu(x, y)}$$

est convergent pour toutes les positions du point (x, y) distinctes du point (a, b) . En effet, écrivons ce produit de la façon suivante

$$(8) \quad \Pi_2(x, y) = e^{\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \text{Log } \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)};$$

soit (x, y) un point analytique distinct de (a, b) . Il existe un entier ν' tel que pour $\nu \geq \nu'$ le point (x, y) soit en dehors du domaine $\frac{1}{\varepsilon} \bmod (a_\nu - a)$ du point (a, b) . Alors partageons la somme qui figure en exposant dans le second membre de (8) en deux parties: la première composée des termes dans lesquels $\nu < \nu'$, la seconde de ceux dans lesquels $\nu \geq \nu'$. La première somme est finie comme composée d'un nombre fini de termes et la seconde est finie également, car pour $\nu \geq \nu'$ on a

$$\text{mod } [\text{Log } \omega_\nu(x, y \mid a_\nu, b_\nu) - \chi_\nu(x, y)] \leq \varepsilon_\nu.$$

La convergence du produit (7) est donc démontrée. Remarquons de plus que la fonction $\chi_\nu(x, y)$ est une fonction *rationnelle* de x et y n'ayant d'autre pôle que le point (a, b) . En effet on a, dans le développement (4),

$$\rho_\mu^{(\nu)}(x, y) = \frac{1}{1.2 \dots \mu} \left[\frac{d^\mu \text{Log } \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)}{d\xi^\mu} \right]_{(\xi, \eta) = (a, b)},$$

et les dérivées successives de la fonction

$$\text{Log } \omega_\nu(x, y \mid \xi, \eta)$$

par rapport au paramètre ξ sont des fonctions rationnelles de (x, y) ayant les deux seuls pôles (ξ, η) et (a, b) . Comme pour obtenir $\rho_\mu(x, y)$ il faut remplacer, dans ces dérivées, (ξ, η) par (a, b) , les coefficients $\rho_\mu(x, y)$ sont des fonctions rationnelles ayant le seul pôle (a, b) ; il en est donc de même de la fonction $\chi_\nu(x, y)$. Le produit (7) définit donc une fonction uniforme $\Pi_2(x, y)$ du point analytique (x, y) possédant à l'égard des

points (a_ν, b_ν) situés dans le domaine $\varepsilon\delta$ du point (a, b) les propriétés indiquées dans l'énoncé. La fonction

$$H(x, y) = H_1(x, y)H_2(x, y)$$

est la fonction cherchée.

La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$H(x, y) \cdot e^{G(x, y \mid a, b)}$$

où $G(x, y \mid a, b)$ est une fonction uniforme du point (x, y) n'ayant d'autre point singulier que (a, b) .

Remarque. Si le déterminant $\Delta(a, b)$ est nul, l'on pourra lever la difficulté comme on l'a déjà fait dans la généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler exposée dans le premier mémoire. Il suffira de remplacer la fonction qui est en exposant dans l'équation (1) par

$$\lambda_1 Z^{(k)}(a, b) + \lambda_2 Z^{(k+1)}(a, b) + \dots + \lambda_p Z^{(k+p-1)}(a, b)$$

où k désigne un entier convenablement déterminé. La suite de la démonstration est la même que plus haut.

II. Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.

Les théorèmes généraux sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) conduisent, dans le cas particulier où le genre p est égal à l'unité, à des théorèmes sur les fonctions uniformes doublement périodiques. Je vais indiquer, pour ces fonctions, les principaux théorèmes analogues à ceux que j'ai exposés dans les recherches précédentes sur les fonctions uniformes d'un point analytique. Je supposerai que les fonctions uniformes dont je vais m'occuper admettent les deux périodes ω et ω' ; en désignant par $\theta_1(u)$ la fonction θ_1 formée avec ces périodes, je poserai, avec M. Hermite,

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du}$$

et

$$Z^{(\nu)}(u) = \frac{d^\nu Z(u)}{d u^\nu}.$$

Fonctions ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.

Soit $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique, ayant dans un parallélogramme des périodes un nombre fini de points singuliers.

Théorème I. *La somme des résidus de $f(u)$ relatifs aux points singuliers situés dans un même parallélogramme des périodes est égale à zéro.*

En effet l'intégrale

$$\int f(u) du$$

prise sur le contour du parallélogramme est égale à zéro en vertu des relations

$$f(u + \omega) = f(u), \quad f(u + \omega') = f(u).$$

Remarque. Soit en particulier $f(u)$ une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes d'autres points singuliers que des pôles. La décomposition de cette fonction en éléments simples par la formule de M. Hermite résulte de l'application du théorème I à la fonction doublement périodique de u

$$f(u)[Z(u - x) - Z(u - x_0)],$$

x et x_0 étant deux points quelconques pris dans l'intérieur d'un parallélogramme des périodes.

II. *Expression générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ n'ayant, dans un parallélogramme des périodes, qu'un point singulier a .*

Dans un certain domaine du point a , la fonction $f(u)$ est représentée par une série de la forme

$$(9) \quad f(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{A_{\nu-1}}{(x-a)^\nu},$$

où $A_0 = 0$ en vertu du théorème I.

Soient x et x_0 deux points situés dans le parallélogramme des périodes; considérons la fonction de u

$$(10) \quad f(u) [Z(u - x) - Z(u - x_0)];$$

cette fonction est une fonction uniforme doublement périodique de u ayant, dans le parallélogramme des périodes, les trois points singuliers a , x et x_0 . Le premier point $u = a$ est un point singulier essentiel, et le résidu relatif à ce point est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)];$$

les deux autres points $u = x$ et $u = x_0$ sont des pôles de résidus respectifs $f(x)$ et $-f(x_0)$. On a donc, d'après le théorème I

$$(11) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a-x) - Z^{(\nu)}(a-x_0)].$$

En posant pour simplifier

$$C = f(x_0) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} Z^{(\nu)}(a-x_0)$$

on a

$$(12) \quad f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2..\nu} Z^{(\nu)}(a-x).$$

Telle est l'expression cherchée.

On obtiendra de même l'expression la plus générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(u)$ ayant, dans un parallélogramme des périodes n points singuliers a_1, a_2, \dots, a_n . Il suffit, pour cela, d'appliquer le théorème I à la fonction (10). On obtient ainsi, pour la fonction cherchée, l'expression

$$(13) \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2..\nu} [Z^{(\nu)}(a_k-x) - Z^{(\nu)}(a_k-x_0)]$$

avec

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)} = 0.$$

Fonctions doublement périodiques ayant dans un parallélogramme des périodes une infinité de points singuliers ou présentant des lacunes.

III. Soit un parallélogramme formé avec les périodes ω, ω' , et, dans l'intérieur de ce parallélogramme, un contour fermé C formé d'une

ou plusieurs courbes fermées. Appelons espace E la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur du contour C . Désignons par $f(u)$ une fonction holomorphe dans l'espace E et admettant les deux périodes ω, ω' , c'est à dire reprenant les mêmes valeurs aux points homologues des côtés opposés du parallélogramme; enfin soient x et x_0 deux points de l'espace E . L'intégrale

$$(14) \quad \int f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)] du$$

prise sur le contour du parallélogramme des périodes est égale à zéro, car la fonction de u soumise à l'intégration est doublement périodique. D'autre part cette intégrale (14) se réduit à la somme de trois intégrales, l'une prise le long d'une petite circonférence entourant le point x , l'autre le long d'une petite circonférence entourant x_0 et la troisième prise le long du contour C . La première de ces intégrales est $2\pi i f(x)$, la seconde $-2\pi i f(x_0)$; on a donc

$$(15) \quad f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)] du,$$

l'indice C indiquant que l'intégrale est prise sur le contour C .

Cette équation (15) définit ainsi la fonction $f(x)$ dans l'espace E et dans les espaces homologues au moyen des valeurs que prend cette fonction sur le contour C .

IV. Pour faire une application de la relation (15) supposons que le contour C soit obtenu de la façon suivante. Considérons n cercles C_1, C_2, \dots, C_n situés à l'intérieur du parallélogramme des périodes et ayant pour centres les points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Prenons pour espace E la portion du plan située à l'intérieur du parallélogramme et à l'extérieur de ces cercles; le contour C sera alors formé d'arcs de cercles appartenant aux circonférences C_1, C_2, \dots, C_n . En désignant par $f(u)$ une fonction doublement périodique holomorphe dans l'espace E , on a, pour cette fonction, l'équation (15). Or l'intégrale qui figure dans cette équation se partage en une somme de n intégrales prises respectivement sur les arcs des cercles C_1, C_2, \dots, C_n qui constituent le contour C :

$$(16) \quad \int_C f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)] du$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)] du,$$

l'indice C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise sur les arcs du cercle C_k qui font partie du contour C . Prenons en particulier l'intégrale

$$(17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(u)[Z(u-x) - Z(u-x_0)] du;$$

la fonction de u , $Z(u-x) - Z(u-x_0)$, est holomorphe dans un cercle de centre α_k et de rayon supérieur au rayon du cercle C_k . Cette fonction est donc, pour les valeurs de u qui figurent dans l'intégrale (17), développable en une série uniformément convergente

$$(18) \quad Z(u-x) - Z(u-x_0) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(u-\alpha_k)^\nu}{1.2.\dots\nu} [Z^{(\nu)}(\alpha_k-x) - Z^{(\nu)}(\alpha_k-x_0)].$$

Portant ce développement dans l'intégrale (17) on voit que cette intégrale devient égale à

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} [Z^{(\nu)}(\alpha_k-x) - Z^{(\nu)}(\alpha_k-x_0)]$$

où

$$(19) \quad A_\nu^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{1.2.\dots\nu} \int_{C_k} (u-\alpha_k)^\nu f(u) du$$

Donc enfin on a, d'après les relations (15) et (16),

$$(20) \quad f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} [Z^{(\nu)}(\alpha_k-x) - Z^{(\nu)}(\alpha_k-x_0)],$$

ou en posant:

$$(21) \quad \begin{aligned} A &= f(x_0) - \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x_0) \\ f(x) &= A + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(a_k - x). \end{aligned}$$

Remarque I. La somme

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)}$$

est nulle, car cette somme est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(u) du.$$

Remarque II. Si l'on suppose que le nombre $n = 1$, on voit que toute fonction doublement périodique $f(u)$ holomorphe dans l'espace situé à l'intérieur du parallélogramme des périodes et à l'extérieur d'un cercle de centre α compris dans ce parallélogramme, est représentée dans cet espace par la série

$$(22) \quad f(u) = A + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu)}(a - x).$$

V. Généralisation du théorème de M. Mittag-Leffler.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ des points tous différents situés dans un parallélogramme des périodes et tels que, pour $\nu = \infty$, $\lim a_\nu = a$; soient en outre $f_1(x, a_1), f_2(x, a_2), \dots, f_\nu(x, a_\nu), \dots$ des fonctions méromorphes doublement périodiques ayant respectivement pour pôles dans le parallélogramme les seuls points a_ν et a ; il existe une fonction uniforme doublement périodique $F(x)$ admettant le point a pour point singulier essentiel et les points a_ν pour pôles, de telle façon que la différence $F(x) - f_\nu(x, a_\nu)$ soit régulière au point a_ν .

La fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est de la forme

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{k=0}^{k=n_\nu} A_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a_\nu) + \sum_{k=0}^{k=n'_\nu} B_k^{(\nu)} Z^{(k)}(x - a)$$

avec

$$A_0^{(\nu)} + B_0^{(\nu)} = 0.$$

La démonstration du théorème repose sur ce fait que, pour toutes les valeurs de x telles que

$$\text{mod } \frac{a_\nu - a}{x - a} < \varepsilon, \quad \varepsilon < 1,$$

la fonction $f_\nu(x, a_\nu)$ est développable en série suivant les puissances croissantes de $(a_\nu - a)$:

$$f_\nu(x, a_\nu) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2\dots m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m} \right]_{a_\nu = a}$$

On en conclut que l'on peut prendre dans le développement précédent un nombre m_ν de termes assez grand pour que, en posant

$$F_\nu(x) = f_\nu(x, a_\nu) - \sum_{m=0}^{m=m_\nu} \frac{(a_\nu - a)^m}{1.2\dots m} \left[\frac{d^m f_\nu(x, a_\nu)}{da_\nu^m} \right]_{a_\nu = a}$$

la série $F(x) = \sum F_\nu(x)$ soit absolument convergente dans le voisinage de tout point x_0 distinct des points a_ν . Cette fonction $F(x)$ est la fonction demandée. La fonction la plus générale possédant les propriétés indiquées dans l'énoncé est

$$F(x) + G(x | a)$$

où $G(x | a)$ désigne une fonction uniforme doublement périodique n'ayant dans un parallélogramme des périodes que le point singulier a .

VI. Décomposition en facteurs primaires.

On déduit du théorème précédent la formation d'une fonction uniforme doublement périodique $\Phi(x)$ admettant les points a_ν pour zéros de degrés n_ν , ($\nu = 1, 2 \dots \infty$), n'ayant pas de pôles et admettant le point a pour point singulier essentiel. Si l'on pose

$$p_\nu(x, a_\nu) = \left[\frac{\theta_1(x - a_\nu)}{\theta_1(x - a)} \right]^{n_\nu} e^{n_\nu(a_\nu - a)Z(x - a)},$$

la fonction $\phi(x)$ sera de la forme

$$\phi(x) = A \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} p_{\nu}(x, a_{\nu}) \cdot e^{-n_{\nu} \sum_{m=1}^{m=m_{\nu}} \frac{(a - a_{\nu})^{m+1}}{1.2 \dots (m+1)} Z^{(m)}(x - a)}$$

les entiers m_{ν} étant convenablement choisis. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le théorème V à la fonction $\frac{d \log \phi(x)}{dx}$ en prenant

$$f_{\nu}(x, a_{\nu}) = \frac{d \log p_{\nu}(x, a_{\nu})}{dx}.$$

VII. L'on voit que, dans cette théorie des fonctions doublement périodiques, la fonction élémentaire analogue à

$$\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0}$$

dans la théorie des fonctions uniformes d'une variable et à $Z(\xi, \eta)$ dans la théorie des fonctions uniformes d'un point analytique est

$$Z(u - x) - Z(u - x_0).$$

De même que $Z(\xi, \eta)$ est une fonction *rationnelle* de ξ et η admettant les deux pôles (x, y) , (x_0, y_0) avec les résidus respectifs -1 et $+1$, cette fonction $Z(u - x) - Z(u - x_0)$ est une fonction *doublement périodique* de u admettant les deux pôles x et x_0 avec les résidus $+1$ et -1 . Le théorème exprimé par l'équation (15) est analogue à un théorème de Cauchy ainsi énoncé: si une fonction $f(x)$ est holomorphe à l'extérieur d'une courbe fermée C , on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - x_0} \right] d\xi.$$

Le théorème énoncé dans la Remarque II du N° IV est analogue à un théorème de Cauchy ainsi modifié: si une fonction $f(x)$ est holomorphe en tous les points situés à l'extérieur d'un cercle de centre a , cette fonction est, pour tous ces points, représentée par le développement

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_{\nu} \frac{d^{\nu} \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-x_0} \right]}{da^{\nu}}.$$

J'ai indiqué ces analogies dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 9 octobre 1882. Il me reste à ajouter que mon illustre maître M. Hermite dans ses *Leçons à la Faculté des Sciences de Paris* 1882 rédigées par M. Andoyer a donné une méthode très-simple pour l'étude des fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DANS UNE AIRE LIMITÉE PAR DES ARCS DE CERCLE

PAR

P. APPELL

à PARIS.

Exemple I.

Considérons quatre cercles ayant pour rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour centres les points

$$+1, \quad +i, \quad -1, \quad -i.$$

L'espace situé à l'extérieur de ces quatre cercles est composé de deux parties

1°) Une aire finie $ABCD$ qui contient l'origine O .

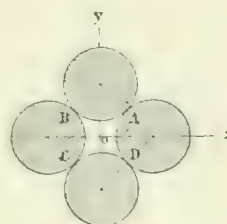
2°) Une aire indéfinie.

Je vais former par la méthode générale indiquée dans les Comptes Rendus⁽¹⁾ une série de fractions rationnelles qui converge dans ces deux aires et qui, dans l'aire finie $ABCD$, a pour somme 1 et dans l'aire indéfinie est égale à 0. D'après la méthode générale ce développement sera de la forme

$$(1) \quad 1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-1)^n} + \frac{A_n^{(i)}}{(x-i)^n} + \frac{A_n^{(-1)}}{(x+1)^n} + \frac{A_n^{(-i)}}{(x+i)^n} \right].$$

Les coefficients de ce développement sont donnés par les formules suivantes:

$$A_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{BA} (z-1)^{n-1} dz$$



⁽¹⁾ Séance du premier Mai 1882.

l'indice DA indiquant que l'intégration est faite sur l'arc de cercle DA .
Si l'on pose

$$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta i}$$

il faudra faire varier θ de $-\frac{3\pi}{4}$ à $-\frac{5\pi}{4}$. Donc

$$A_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{4}} e^{n\theta i} i d\theta = \frac{(-1)^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \text{Sin } \frac{n\pi}{4}$$

On trouve de même

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} (z - i)^{n-1} dz = \frac{(-i)^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \text{Sin } \frac{n\pi}{4}$$

$$A_n^{(-1)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{BC} (z + 1)^{n-1} dz = \frac{1}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \text{Sin } \frac{n\pi}{4}$$

$$A_n^{(-i)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{CD} (z + i)^{n-1} dz = \frac{i^n}{\pi n (\sqrt{2})^n} \cdot \text{Sin } \frac{n\pi}{4}$$

En portant ces valeurs dans le développement (1) l'on obtient la série cherchée

$$(2) \quad 1 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\text{Sin } \frac{n\pi}{4}}{n 2^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n} \right]$$

Cette égalité (2) a lieu pour tous les points x situés dans l'aire $ABCD$.
La série qui forme le second membre est encore convergente dans l'espace indéfini situé en dehors des quatre cercles; mais sa somme est alors *nulle*.

Dans le cas actuel il serait aisé de *sommer directement* la série (2).
En effet remarquant que

$$\text{Sin } \frac{n\pi}{4} = e^{\frac{i\pi n}{4}} - e^{-\frac{i\pi n}{4}} \quad 2i$$

et que la série

$$n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^n}{n} + \dots$$

a pour somme la valeur de $-\text{Log}(1-u)$ qui s'annule avec u , l'on voit que la série

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin} \frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(1-x)^n}$$

a pour somme la valeur de

$$(3') \quad \frac{1}{2\pi i} \text{Log} \left(\frac{1+i-2x}{1-i-2x} \right)$$

qui s'annule pour $x = \infty$. Cette fonction (3') est holomorphe à l'extérieur du cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$; elle est représentée par la série (3) à l'extérieur de ce cercle. Au point $x = 0$ la fonction (3') et, par suite, la fonction (3) prennent la valeur $\frac{1}{4}$.

Faisant la même remarque pour chacune des séries partielles qui constituent la série (2), l'on voit que cette série a pour somme

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \left[\text{Log} \frac{1+i-2x}{1-i-2x} + \text{Log} \frac{1+i-2xi}{1-i-2xi} + \text{Log} \frac{1+i+2x}{1-i+2x} + \text{Log} \frac{1+i+2xi}{1-i+2xi} \right]$$

où il faut prendre pour chacun des logarithmes la détermination qui s'annule à l'infini. Ces quatre logarithmes sont des fonctions holomorphes de x , le premier à l'extérieur du cercle de centre $+1$, le second à l'extérieur du cercle de centre $+i$, le troisième du cercle de centre -1 , le quatrième du cercle de centre $-i$; de plus chacun de ces logarithmes prend pour $x = 0$ la valeur $\frac{\pi i}{4}$. Or la fonction (4) peut s'écrire

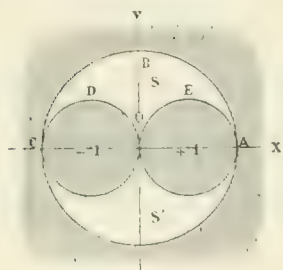
$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \text{Log} \frac{(1+i-2x)(1+i-2xi)(1+i+2x)(1+i+2xi)}{(1-i-2x)(1-i-2xi)(1-i+2x)(1-i+2xi)},$$

d'après ce qui précède cette fonction (5) est holomorphe dans l'aire indéfinie située à l'extérieur des quatre cercles; mais elle est *constante* dans cette aire car elle se réduit à $\frac{1}{2\pi i} \text{Log} 1$; donc elle est *nulle dans cette aire indéfinie* puisqu'elle est nulle à l'infini. Cette même fonction (5) est holomorphe dans l'aire finie $ABCD$; mais elle est constante dans cette aire, car elle est égale à $\frac{1}{2\pi i} \text{Log} 1$; elle est donc *dans l'aire ABCD*

égale à l'unité puisqu'elle est égale à l'unité pour $x = 0$ comme nous l'avons vu.

Exemple II.

Pour indiquer un exemple dans lequel l'un des cercles limites tourne sa concavité vers l'intérieur de l'aire, considérons la surface située à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 2 et à l'extérieur des cercles de centres -1 et $+1$ et de rayon 1. Cette surface se compose de deux parties séparées S et S' . Nous allons former une série de fractions rationnelles représentant l'unité dans l'aire S et zéro dans S' .



Soit x un point de l'aire S , on a

$$(6) \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z - x},$$

l'intégration étant faite sur le contour de S

$ABCDOEA$.

En partageant l'intégrale en trois parties relatives aux trois demi-cercles qui limitent l'aire S , on a

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABC} \frac{dz}{z - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{CDO} \frac{dz}{z - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{OEA} \frac{dz}{z - x}.$$

Dans la première intégrale mod. $x < \text{mod. } z$; donc

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \dots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \dots;$$

dans la seconde mod. $(x + 1) > \text{mod. } (z + 1)$

$$\frac{1}{z - x} = -\frac{1}{(x + 1)} - \frac{z + 1}{(x + 1)^2} - \dots - \frac{(z + 1)^{n-1}}{(x + 1)^n} - \dots;$$

enfin dans la troisième

$$\frac{1}{z - x} = -\frac{1}{x - 1} - \frac{z - 1}{(x - 1)^2} - \dots - \frac{(z - 1)^{n-1}}{(x - 1)^n} - \dots$$

Portant dans l'équation (6) et développant on a

$$(7) \quad 1 = \frac{1}{2\pi i} \left[A_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n^{(0)} x^n + \frac{A_n^{(-1)}}{(x+1)^n} + \frac{A_n^{(1)}}{(x-1)^n} \right) \right].$$

Les valeurs des coefficients sont données par les formules suivantes:

$$A_0^{(0)} = \int_{ABC} \frac{dz}{z} = \pi i$$

$$A_n^{(0)} = \int_{ABC} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \int_0^\pi e^{-n\theta i} i d\theta = \frac{1}{n2^n} [1 - (-1)^n]$$

$$A_n^{(-1)} = - \int_{DO} (z+1)^{n-1} dz = - \int_\pi^0 e^{n\theta i} i d\theta = -\frac{1}{n} [1 - (-1)^n]$$

$$A_n^{(1)} = - \int_{OEA} (z-1)^{n-1} dz = - \int_\pi^0 e^{n\theta i} i d\theta = -\frac{1}{n} [1 - (-1)^n].$$

L'on a donc le développement cherché

$$(8) \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \left[\frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} \right]$$

La série qui forme le second membre converge encore dans l'aire S' mais sa somme est alors *nulle*.

L'on peut encore ici se rendre compte a priori des propriétés de la série (8). Soit posé

$$(9) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \left[\frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x-1)^n} \right]$$

Cette fonction existe dans les aires S et S' . La série partielle

$$\sum_1^\infty \frac{1 - (-1)^n}{n} \cdot \frac{x^n}{2^n}$$

définit une fonction holomorphe dans le cercle de centre 0 et de rayon 2; cette fonction est la détermination de

$$\text{Log} \frac{2+x}{2-x}$$

qui s'annule pour $x = 0$. La série partielle

$$-\sum_1^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(x+1)^n}$$

définit une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle de centre -1 et de rayon 1; c'est la détermination de

$$\text{Log} \frac{x}{x+2}$$

qui s'annule à l'infini. Enfin la troisième série partielle est, dans tout l'espace situé en dehors du cercle de centre 1 et de rayon 1, égale à la détermination de

$$\text{Log} \frac{x-2}{x}$$

qui s'annule à l'infini.

La fonction $\varphi(x)$ est donc holomorphe dans les deux aires S et S' et elle est égale dans ces aires à

$$\varphi(x) = \text{Log} \frac{2+x}{2-x} + \text{Log} \frac{x}{x+2} + \text{Log} \frac{x-2}{x}$$

les logarithmes ayant les déterminations indiquées. Mais on voit immédiatement que le second membre est indépendant de x et égal à $\text{Log} (-1)$. Donc $\varphi(x)$ est constant dans les aires S et S' . Pour avoir la valeur constante de $\varphi(x)$ dans S il suffit de prendre la valeur en un point de S , par exemple au point $x = \varepsilon i$, ε étant positif et infiniment petit. Alors $\text{Log} \frac{2+\varepsilon i}{2-\varepsilon i}$ est infiniment petit; quant à la somme $\text{Log} \frac{x}{x+2} + \text{Log} \frac{x-2}{x}$, elle est égale à la valeur que prend au point εi la détermination de $\text{Log} \frac{x-2}{x+2}$ qui devient nulle à l'infini, la variable x ne pouvant pas traverser la droite AOC . Or la valeur de ce logarithme au point εi est πi . Donc si x est un point de l'aire S

$$\varphi(x) = \pi i;$$

on voit de même que, dans l'aire S' ,

$$\varphi(x) = -\pi i.$$

Cela résulte encore de ce que la série (9) qui sert de définition à $\varphi(x)$ est une fonction *impaire*. La série (8) étant égale à

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \varphi(x)$$

a pour somme 1 dans l'aire S et 0 dans S' .

Remarque I. Ces exemples ouvrent la voie à d'autres recherches sur un mode particulier d'existence des fonctions; l'on voit en effet que dans les exemples précédents l'on a composé des fonctions *holomorphes* avec des fonctions à déterminations multiples qui sont ici des logarithmes. Je me propose d'examiner si l'on ne peut pas obtenir des résultats analogues en remplaçant les logarithmes par d'autres fonctions à déterminations multiples comme par exemple

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

où $P(x)$ est un polynôme.

Remarque II. Si nous reprenons la série du premier exemple,

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{(1-x)^n} + \frac{1}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n} \right],$$

nous voyons que la série $\phi'(x)$ constituée par les dérivées des termes de la série $\phi(x)$

$$\phi'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{i}{(1+ix)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x)^{n+1}} + \frac{i}{(1-ix)^{n+1}} \right]$$

est convergente aux mêmes points que la série $\phi(x)$ et a constamment pour somme *zéro*. On le vérifie facilement, car si l'on remplace $\sin \frac{n\pi}{4}$ par

$\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{n\pi i}{4}} - e^{-\frac{n\pi i}{4}} \right)$, l'on n'a plus qu'à sommer des progressions géométriques.

D'une façon générale, la série $\phi^{(k)}(x)$ constituée par les dérivées d'ordre k des termes de la série $\phi(x)$ est convergente aux mêmes points que cette série $\phi(x)$ et a constamment pour somme *zéro*.

Soit alors $F(x)$ une série de fractions rationnelles convergente dans les mêmes régions que $\phi(x)$; la série

$$F(x) + \lambda_1 \phi'(x) + \lambda_2 \phi''(x) + \dots + \lambda_k \phi^{(k)}(x)$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont arbitraires) est une série de fractions rationnelles possédant les mêmes régions de convergence et la même somme que $F(x)$. Par exemple la série

$$\phi(x) + \lambda_1 \phi'(x) + \lambda_2 \phi''(x) + \dots + \lambda_k \phi^{(k)}(x)$$

possède les mêmes propriétés que $\phi(x)$.

Les remarques précédentes conduisent à une autre conséquence. Considérons, par exemple, la série

$$S(x) = \frac{1}{x^2} + \lambda \phi'(x)$$

où λ désigne une constante; cette série $S(x)$ est convergente aux mêmes points que $\phi(x)$ et représente une même fonction analytique $\frac{1}{x^2}$ dans toutes ses régions de convergence. Intégrons cette série terme à terme, nous aurons une autre série de fractions rationnelles

$$S_1(x) = -\frac{1}{x} + \lambda \phi(x) + C$$

convergente aux mêmes points que $S(x)$, mais représentant dans les deux régions de convergence de $S(x)$ deux fonctions analytiques *différant par une constante arbitraire* λ . En effet $S_1(x) = -\frac{1}{x} + C$ dans l'espace indéfini extérieur aux quatre cercles; et $S_1(x) = -\frac{1}{x} + \lambda + C$ dans l'aire finie $ABCD$ qui comprend l'origine.

Donc, si une série de fractions rationnelles représente une même fonction analytique dans toutes ses régions de convergence et si la série obtenue en intégrant la proposée terme à terme est encore une série de fractions rationnelles, il peut arriver que cette série intégrale converge aux mêmes points que la proposée et représente dans les différentes régions de convergence des fonctions analytiques *différant par des constantes*.

ZUR THEORIE DER QUADRATISCHEN RESTE,

VON

ERNST SCHERING.

GAUSS hat durch seine *Disquisitiones Arithmeticae* die Lehre von den ganzen Zahlen zu einer systematischen Wissenschaft erhoben. In diesem Werke gibt es wol nur eine Stelle, von welcher man behaupten kann, dass die systematische Anordnung durchbrochen ist, nemlich dort wo GAUSS zwischen die Untersuchung der Congruenzen ersten Grades und der Congruenzen zweiten Grades die Untersuchung der höheren Potenzreste einschaltet. Es erscheint mir, anstatt die höheren Potenzreste als das allgemeinere Gebiet, zu welchen die quadratischen Reste gehören, dort zu untersuchen, natürlicher, die quadratischen Congruenzen nicht nur für Primzahl-Moduln, welche von GAUSS fast ausschliesslich behandelt werden, sondern auch für zusammengesetzte Moduln vollständig zu erledigen.

Auf solche Weise erhält man nicht nur eine Reihe neuer Lehrsätze, sondern man gelangt auch unmittelbar zu der Charakteristik einer Zahl im Gebiete der quadratischen Reste in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul, dieser Charakteristik, auf welche GAUSS bei seinem ersten Beweise für das Reciprocitäts-Gesetz in der Theorie der quadratischen Reste erst aufmerksam wurde, nachdem er das Reciprocitäts-Gesetz durch Induction gefunden hatte.

Die Wichtigkeit dieses ersten Beweises, welchen GAUSS am 8. April 1796 gefunden hat (Vergl. meine Bemerkungen Seite 475 zu GAUSS' *Werken* Band I), ist von DIRICHLET auch dadurch anerkannt, dass er der Wiedergabe desselben Beweises in übersichtlicher Form eine eigne Abhandlung gewidmet hat (Crelle's Journal Bd. XLVII, Berlin 1854, Seite

139 bis 150). Es mag deshalb mir gestattet sein, auf einigen Blättern den unmittelbaren Beweis eines von mir gefundenen für jene von GAUSS eingeführte Charakteristik geltenden besonders einfachen Satzes zusammenzustellen; eines Satzes, welcher sich dem grossen Meister bei Abfassung seiner Disquiss. Arithmm. wie auch später entzogen zu haben scheint, wol deshalb, weil er in jenem Werke die Behandlung der quadratischen Reste für zusammengesetzte Moduln vermieden hat.

Da für die Vergleichung der verschiedenen Beweise des Reciprocitäts-Satzes der Umfang der benutzten Theorien von besonderer Bedeutung ist, so will ich hervorheben, dass im Folgenden von dem Inhalte der Disquiss. Arithmm. nichts weiter vorausgesetzt wird als die erste Section, welche im Allgemeinen von den Congruenzen der Zahlen handelt, und die zweite Section, von den Congruenzen des ersten Grades, bis einschliesslich des Artikel 36.

Der in diesem Artikel bewiesene Lehrsatz lässt sich, mit Hinzufügung einer leicht zu erledigenden Vervollständigung so aussprechen: Ist zu jedem von mehreren mit einander theilerfremden Moduln $A, B, C, D \dots$ eine beliebige Zahl, beziehungsweise $a, b, c, d \dots$ vorgegeben, so lässt sich zum Producte $ABCD \dots$ der Moduln als neuer Modul immer ein und nur ein Rest z finden, welcher den einzelnen vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d \dots$ nach den bezüglichen Moduln A, B, C, D congruent ist: $z \equiv a \pmod{A}$, $z \equiv b \pmod{B}$, $z \equiv c \pmod{C} \dots$

Ausserdem wird nur noch der Artikel 38 vorausgesetzt. Dieser bestimmt die EULERSche Function $\varphi(A)$, nemlich die Anzahl der positiven Zahlen, welche zu einer gegebenen positiven Zahl A theilerfremd und nicht grösser als dieselbe sind. Der Ausdruck für die EULERSche Function wird im Folgenden nicht benutzt sondern nur der Begriff derselben.

Zunächst wollen wir für den Fall, dass der Modul m eine zusammengesetzte Zahl und dass die Zahl a zu m theilerfremd ist, die Anzahl der Wurzeln x in der Congruenz

$$xx \equiv a \pmod{m}$$

bestimmen. Einige hierzu in enger Beziehung stehende bekannte Sätze will ich der Vollständigkeit wegen mit aufnehmen.

x. 1. Die ungerade Zahl a ist dann und nur dann quadratischer Rest zum Modul 4, wenn sie die Form $a = 4k + 1$ hat. Für diesen

Fall besitzt die Congruenz $xx \equiv a \pmod{4}$ zwei von einander verschiedene Auflösungen nemlich:

$$(I) \quad x \equiv +1 \quad \text{und} \quad x \equiv -1 \pmod{4}.$$

N. 2. Die ungerade Zahl a ist dann und nur dann quadratischer Rest zu einer die Zahl 4 übertreffende Potenz von 2, wenn sie die Form $a = 8k + 1$ hat. In der That, besteht die Congruenz $a \equiv x_s x_s \pmod{2^s}$ und bestimmt man h durch die Congruenz

$$x_s h \equiv \frac{a - x_s x_s}{2^s} \pmod{2^{s-2}},$$

setzt man ferner

$$x_\sigma = x_s + h 2^{s-1}$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a \pmod{2^{2s-2}}$. Von der Potenz $2^s = 2^3$ gelangt man durch Wiederholung dieses Verfahren zu allen höheren Potenzen von 2 als Moduln.

N. 3. Für eine Zahl a von der Form $8k + 1$ hat die Congruenz $xx \equiv a \pmod{2^{\pi_0}}$, wenn $\pi_0 > 2$ ist, vier Auflösungen; bezeichnet x_0 eine derselben, so sind:

$$(II) \quad x \equiv +x_0, \quad x \equiv -x_0, \quad x \equiv +x_0 + 2^{\pi_0-1}, \quad x \equiv -x_0 - 2^{\pi_0-1} \pmod{2^{\pi_0}}$$

jene vier von einander verschiedene Wurzeln. Die Zahl $xx - x_0 x_0$ wird nemlich, weil x und x_0 ungerade sind, nur dann durch 2^{π_0} theilbar, wenn entweder $x - x_0$ oder $x + x_0$ durch 2^{π_0-1} theilbar ist.

N. 4. Ist p eine ungerade Primzahl und ist die durch p nicht theilbare Zahl a quadratischer Rest zu p , so ist a auch quadratischer Rest zu jeder Potenz von p als Modul. In der That besteht die Congruenz $a \equiv x_s x_s \pmod{p^s}$ und bestimmt man h durch die Congruenz

$$2x_s h \equiv \frac{a - x_s x_s}{p^s} \pmod{p^s}, \quad \text{setzt dann} \quad x_\sigma = x_s + h p^s$$

so wird $x_\sigma x_\sigma \equiv a \pmod{p^{2s}}$. Auf solche Weise gelangt man von der Potenz $p^s = p$ durch Wiederholung zu jeder Potenz von p .

N. 5. Ist p_λ eine ungerade Primzahl und ist die durch p_λ nicht theilbare Zahl a quadratischer Rest zu p_λ , so hat die Congruenz $xx \equiv a \pmod{p_\lambda^{\pi_\lambda}}$ zwei Auflösungen; ist x_λ eine derselben, so sind

$$(III) \quad x \equiv +x_\lambda \quad \text{und} \quad x \equiv -x_\lambda \pmod{p_\lambda^{\pi_\lambda}}$$

die beiden von einander verschiedenen Wurzeln, weil $xx - x_\lambda x_\lambda$ nur für diese beiden Fälle durch $p_\lambda^{\pi_\lambda}$ theilbar wird.

N. 6. Bezeichnet m eine zusammengesetzte positive Zahl, hat also die Form

$$(IV) \quad m = 2^{\pi_0} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_n^{\pi_n}$$

worin $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen und $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ positive Zahlen bedeuten, während π_0 auch der Null gleich sein kann,

bezeichnet ferner a eine zu m theilerfremde Zahl,

so hat die Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ entweder keine oder $\phi(m)$ von einander verschiedene Auflösungen, wenn nemlich

$$(V) \quad \begin{aligned} \phi(m) &= 2^{\pi_0} && \text{für } \pi_0 < 2, \\ \phi(m) &= 2^{\pi_0+1} && \text{für } \pi_0 = 2, \\ \phi(m) &= 2^{\pi_0+2} && \text{für } \pi_0 > 2 \text{ gesetzt wird.} \end{aligned}$$

Das Bestehen der Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ erfordert, dass a quadratischer Rest zu jeder der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ und

wenn $\pi_0 = 2$ ist, dass noch $a \equiv 1 \pmod{4}$

wenn aber $\pi_0 > 2$ ist, dass auch $a \equiv 1 \pmod{8}$ sei.

Umgekehrt reichen diese Bedingungen auch zur Möglichkeit der Erfüllung jener Congruenz aus, denn man braucht nur mit Hülfe des oben angegebenen Satzes aus dem Art. 36 der Disquiss. Arithmm. die Zahl x so zu bestimmen,

das sie je einer der beiden Congruenzen (III) für jedes $\lambda \equiv 1, 2, 3, \dots, \mu$;
(VI) und wenn $\pi_0 = 1$ ist, dass sie noch der Congruenz $x \equiv 1 \pmod{2}$;
wenn aber $\pi_0 = 2$ ist, dass x einer der beiden Congruenzen (I);
wenn endlich $\pi_0 > 2$ ist, dass x einer der vier Congruenzen (II) genüge.

Zugleich erkennt man unmittelbar, dass verschiedene Verbindungen der für x erforderlichen linearen Congruenzen auch einander nach dem Modul m incongruente Werthe für x ergeben, so dass also die Anzahl der verschiedenen Verbindungen der linearen Congruenzen gleich der Anzahl der Wurzeln der quadratischen Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ ist, wie es der Lehrsatz zu Anfang dieser N. 6 ausspricht.

Beispiel: Es ist $\phi(60) = \phi(4 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 = 8$; in der That die Wurzeln der Congruenz $xx \equiv 1 \pmod{60}$ sind $x \equiv \pm 1, \pm 11, \pm 19,$

± 29 und von der Congruenz $xx \equiv -11 \pmod{60}$ sind $x \equiv \pm 7, \pm 13, \pm 17, \pm 23$, die Wurzeln, während jede zu 60 theilerfremde Zahl a , welche weder congruent $+1$ noch congruent -11 ist, einen quadratischen Nichtrest zum Modul 60 bedeutet.

N. 7. Die Anzahl der zum Modul m theilerfremden quadratischen Reste ist $= \frac{\varphi(m)}{\phi(m)}$, wie sich unmittelbar ergibt, wenn man jeden der $\varphi(m)$ zum Modul m gehörenden theilerfremden Reste quadriert und den Rest Modulo m bildet, denn es entsteht dadurch nach dem Lehrsatz in N. 6. aus je $\phi(m)$ der $\varphi(m)$ Reste immer wieder derselbe quadratische zu m theilerfremde Rest.

N. 8. Die Anzahl der zum Modul m theilerfremden quadratischen Nichtreste ist demnach $= \varphi(m) - \frac{\varphi(m)}{\phi(m)}$. Beispiel: Es ist $\varphi(60) = 16$, $\phi(60) = 8$ und, wie in N. 6. gefunden, gibt es zum Modul 60 nur die zwei theilerfremden quadratischen Reste $+1$ und -11 , die übrigen 14 theilerfremden Reste $-1, +11, \pm 7, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29$ sind quadratische Nichtreste zum Modul 60.

N. 9. Die quadratische Congruenz $a \equiv xx \pmod{m}$ kann man als speciellen Fall der bilinearen Congruenz $a \equiv yz \pmod{m}$ auffassen. Benutzt man die letztere Congruenz, um für ein gegebenes, zu einem die Zahl 2 übertreffenden Modul m theilerfremdes, a sämtliche $\varphi(m)$ theilfremden Reste als Werthe der y und z anzuordnen, so ergibt sich, dass dies für alle Reste, mit Ausschluss der Wurzeln x , möglich ist. Will man aber jene Anordnung auf sämtliche $\varphi(m)$ Reste ausdehnen, so braucht man die quadratische Congruenz nur in die Form $a \equiv -x(m-x)$ zu setzen und erhält dann:

$$\begin{aligned}
 a &\equiv -a_1 \cdot a'_1 \pmod{m} \\
 a &\equiv -a_2 \cdot a'_2 \\
 &\dots \dots \dots \\
 a &\equiv -a_{\frac{1}{2}\varphi} \cdot a'_{\frac{1}{2}\varphi} \\
 &\dots \dots \dots \\
 a &\equiv +a_{\frac{1}{2}\varphi+1} \cdot a'_{\frac{1}{2}\varphi+1} \\
 &\dots \dots \dots \\
 a &\equiv +a_{\frac{1}{2}\varphi} \cdot a'_{\frac{1}{2}\varphi}
 \end{aligned}
 \tag{VII}$$

wenn nemlich

$$(VIII) \quad \pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \dots \pm \alpha_{\frac{1}{2}\phi}$$

die $\phi(m)$ von einander verschiedenen Wurzeln x der Congruenz $xx \equiv a \pmod{m}$ bedeuten und

$$(VIII^*) \quad \alpha'_1 = m - \alpha_1, \alpha'_2 = m - \alpha_2, \dots \alpha'_{\frac{1}{2}\phi} = m - \alpha_{\frac{1}{2}\phi}$$

gesetzt ist. Die Zahl $\alpha_{\frac{1}{2}\phi+1}$ wird als irgend ein von $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \dots, \alpha_{\frac{1}{2}\phi}, \alpha'_{\frac{1}{2}\phi}$ verschiedener zum Modul m theilerfremde Rest ausgewählt, wenn solche noch vorhanden sind. Die durch die obige Congruenz bestimmte Zahl $\alpha'_{\frac{1}{2}\phi+1}$ muss dann offenbar von $\alpha_{\frac{1}{2}\phi+1}$ und von den vorgenannten $\phi(m)$ Resten verschieden sein. Sind damit noch nicht alle theilerfremden Reste berücksichtigt, so sei $\alpha_{\frac{1}{2}\phi+2}$ einer der übrigen. Der durch die obige Congruenz bestimmte Rest $\alpha'_{\frac{1}{2}\phi+2}$ ist dann ein von allen $2(\frac{1}{2}\phi + 1) + 1$ vorher schon in Betracht gezogenen Resten verschiedener zum Modul m theilerfremder Rest. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens werden alle $\phi(m)$ Reste in der Weise erschöpft werden, dass die in den vorstehenden Congruenzen (VII) auftretenden α und α' zusammen das vollständige System der $\phi(m)$ zum Modul m theilerfremden Reste

$$(IX) \quad r_1, r_2, r_3 \dots r_{\phi(m)}$$

ausmachen.

Multiplirciren wir die entsprechenden Seiten der obigen Congruenzen (VII) mit einander, so erhalten wir:

$$(X) \quad a^{\frac{1}{2}\phi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\phi(m)} \cdot r_1 r_2 r_3 \dots r_{\phi(m)} \pmod{m}$$

wobei a als quadratischer Rest vorausgesetzt war.

Die Zahl 1 ist quadratischer Rest zu m , wendet man sie als Werth von a an, so erhält man aus der letzten Congruenz den Lehrsatz:

N. 10. Das Product der sämmtlichen $\phi(m)$ zum Modul m theilerfremden Reste ist congruent $(-1)^{\frac{1}{2}\phi(m)}$,

$$(XI) \quad r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{\phi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\phi(m)} \pmod{m}.$$

Der entstehende Rest wird (zufolge N. 6) nur dann zu -1 , wenn m entweder gleich 4 oder gleich irgend einer Potenz einer ungeraden

Primzahl oder endlich gleich dem Doppelten einer solchen Potenz ist. Für alle andere Zahlen m entsteht der Rest $+1$. In dieser Form hat GAUSS die Verallgemeinerung des WILSON'schen Satzes ausgesprochen. Disquiss. Arr. Art. 78. Von dem Beweise hat er eine Andeutung gegeben.

Beispiel: Es ist $1 \equiv -1 \cdot 59 \equiv -11 \cdot 49 \equiv -19 \cdot 41 \equiv -29 \cdot 31 \equiv 7 \cdot 43 \equiv 13 \cdot 37 \equiv 17 \cdot 53 \equiv 23 \cdot 47 \pmod{60}$. und $49 \equiv -7 \cdot 53 \equiv -13 \cdot 47 \equiv -17 \cdot 43 \equiv -23 \cdot 37 \equiv 1 \cdot 49 \equiv 11 \cdot 59 \equiv 19 \cdot 31 \equiv 29 \cdot 41$.

n. 11. Wendet man die bilineare Congruenz $b \equiv y \cdot z \pmod{m}$ auf einen zu m theilerfremden quadratischen Nichtrest b an, um entsprechend wie in n. 9. das vollständige System der theilerfremden Reste für den Modul m zu ordnen, so treten keine Ausnahmefälle wie bei einem quadratischen Reste a ein, sondern in allen Congruenzen ist dasselbe Vorzeichen anzuwenden und man erhält

$$\begin{aligned} b &\equiv \beta_1 \cdot \beta'_1 \pmod{m} \\ b &\equiv \beta_2 \cdot \beta'_2 \\ b &\equiv \beta_3 \cdot \beta'_3 \\ &\dots \dots \dots \\ b &\equiv \beta_{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \end{aligned} \quad \text{(XII)}$$

Hier bilden die $\beta_1 \dots \beta_{\frac{1}{2}\varphi}, \beta'_1 \dots \beta'_{\frac{1}{2}\varphi}$ wieder in einer besonderen Anordnung das vollständige System der zum Modul m theilerfremden Reste $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander und berücksichtigt n. 10, so erhält man

$$\text{(XIII)} \quad b^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \beta_1 \dots \beta_{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \beta'_1 \dots \beta'_{\frac{1}{2}\varphi} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Beispiel: Es ist (modulo 60): $7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 11 \cdot 17 \equiv 13 \cdot 19 \equiv 23 \cdot 29 \equiv 31 \cdot 37 \equiv 41 \cdot 47 \equiv 43 \cdot 49 \equiv 53 \cdot 59$ und $11 \equiv 1 \cdot 11 \equiv 7 \cdot 53 \equiv 13 \cdot 47 \equiv 17 \cdot 43 \equiv 19 \cdot 29 \equiv 23 \cdot 37 \equiv 31 \cdot 41 \equiv 49 \cdot 59$.

Die Vergleichung der n. 9, 10, 11 gibt den

n. 12. LEHRSATZ. Ist a zum Modul m theilerfremder quadratischer Rest, so wird

$$\text{(XIV)} \quad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \pmod{m}.$$

Ist a zum Modul m theilerfremder quadratischer Nichtrest, so wird

$$\text{(XV)} \quad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Hat die bilineare Congruenz $a \equiv y \cdot z \pmod{m}$ in ganzen positiven unter m liegenden Zahlen y und z , von welchen y kleiner als z ist, $\frac{1}{2}\varphi(m)$ Auflösungen, so muss a quadratischer Nichtrest zu m sein.

Beträgt die Anzahl jener Auflösungen aber weniger als $\frac{1}{2}\varphi(m)$ und ist a theilerfremd zu m , so muss a quadratischer Rest zum Modul m sein, und die Anzahl jener Auflösungen wird $\frac{1}{2}\varphi(m) - \frac{1}{2}\psi(m)$ betragen. Beispiel: Wenn jede der zum Modul 60 theilerfremden Zahlen quadriert wird, so entsteht entweder der Rest 1 oder 49, also ist 7 quadratischer Nichtrest zu 60. Es ist $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\psi(60) = 4$, $7^8 \equiv (-11)^4 \equiv 14641 \equiv 1 \equiv (-1)^4 \pmod{60}$.

Es ist $\pmod{50}$:

$1 \equiv -1 \cdot 49 \equiv 3 \cdot 17 \equiv 7 \cdot 43 \equiv 9 \cdot 39 \equiv 11 \cdot 41 \equiv 13 \cdot 27 \equiv 19 \cdot 29 \equiv 21 \cdot 31 \equiv 23 \cdot 37 \equiv 33 \cdot 47$; $3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 7 \cdot 29 \equiv 9 \cdot 17 \equiv 11 \cdot 23 \equiv 13 \cdot 31 \equiv 19 \cdot 37 \equiv 21 \cdot 43 \equiv 27 \cdot 39 \equiv 33 \cdot 41 \equiv 47 \cdot 49$; ferner ist $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^5 = 161051 \equiv 1 \pmod{50}$, also $11^{10} \equiv +1$ und $11 \equiv 19^2 \pmod{50}$ aber $3^{10} = 59049 \equiv -1 \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(50)}$.

N. 13. Ausser der bilinearen Congruenz $a \equiv y \cdot z \pmod{m}$ bietet für eine auf die Zahl a sich beziehende Anordnung der Reste zum Modul m die lineare Congruenz mit a als constanten Factor, zum Beispiel $a \cdot u \equiv v \pmod{m}$, Gelegenheit. Wählt man der Einfachheit halber für u der Reihe nach die positiven unter den absolut kleinsten zum Modul m theilerfremden Reste, sie mögen mit $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ bezeichnet werden; so werden die zugehörigen v zum Modul m theilerfremd, und einander weder unmittelbar noch nach theilweiser Aenderung des Vorzeichens congruent sein. Nimmt man für v auch absolut kleinste Reste, für r'_1, r'_2, \dots absolut kleinste positive Reste und setzt

$$\begin{aligned} (XVI) \quad & a \cdot r_1 \equiv \eta_1 r'_1 \pmod{m} \\ & a \cdot r_2 \equiv \eta_2 r'_2 \\ & \dots \dots \dots \\ & a \cdot r_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)} r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \end{aligned}$$

indem man für $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ keine andere Werthe als $+1$ oder -1 zulässt, so sind also die Zahlen $r'_1, r'_2, \dots, r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ abgesehen von der Reihenfolge dieselben wie $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$. Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser Congruenzen mit einander, dividirt dann die beiden Seiten der entstehenden Congruenz durch das zum Modul m

theilerfremde Product $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ oder $r'_1, r'_2, \dots, r'_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$, so erhält man

$$(XVII) \quad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\frac{1}{2}\varphi(m)} \pmod{m}$$

und demnach unter Benutzung von N. 12 den

N. 14. LEHRSATZ: Die Anzahl $\eta(a, m)$ der aus den Producten von a multiplicirt in die positiven absolut kleinsten zum Modul m theilerfremden Reste sich wieder für den Modul m ergebenden absolut kleinsten aber negativen Reste oder die Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten u, v dargestellten Lösungen der Congruenz $a \cdot u + v \equiv 0 \pmod{m}$ wird eine gerade Zahl wenn a zum Modul m theilerfremder quadratischer Rest das heisst die Congruenz $a \equiv xx \pmod{m}$ lösbar ist, dagegen wenn diese Congruenz nicht lösbar, sondern wenn a zum Modul m theilerfremder quadratischer Nichtrest ist, so wird jene Anzahl $\eta(a, m)$ mit $\frac{1}{2}\phi(m)$ das heisst mit der Anzahl der in absolut kleinsten positiven Resten dargestellten Lösungen w der Congruenz $aa \equiv ww \pmod{m}$ gleichzeitig gerade oder ungerade.

$$(XVIII) \quad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m}, \text{ wenn } a \text{ theilerfremder quadratischer Rest zu } m;$$

$$(XIX) \quad a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\phi(m)} \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \pmod{m}, \text{ wenn } a \text{ theilerfremder quadratischer Nichtrest zu } m.$$

Für den besonderen Fall, dass m eine ungerade Primzahl ist, geht dieser Satz in den von GAUSS Januar 1808 aufgestellten Lehrsatz über, auf welchen er seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Gesetzes gründete (Art. 3. Seite 4, Band II meiner Redaction von GAUSS' Werken). Mein in der hier vorliegenden Abhandlung geführte Beweis geht für jenen besonderen Fall in den Beweis über, welchen DIRICHLET für den GAUSS'schen Satz in seinen frühesten Universitäts-Vorlesungen zu geben pflegte.

Beispiel. Für den Modul 60 ist 49 theilerfremder quadratischer Rest, aber 7 theilerfremder quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(60) = 8$, $\frac{1}{2}\phi(60) = 4$, $49^8 \equiv 11^8 \equiv (11^4)^2 \equiv (14641)^2 \equiv 1$, $7^8 \equiv 11^4 \equiv 1$, $\eta(49, 60) = 8$, $\eta(7, 60) = 4$, $49 \cdot 1 \equiv -11$, $49 \cdot 7 \equiv -17$, $49 \cdot 11 \equiv -1$, $49 \cdot 13 \equiv -23$, $49 \cdot 17 \equiv -7$, $49 \cdot 19 \equiv -29$, $49 \cdot 23 \equiv -13$, $49 \cdot 29 \equiv -19$,

$7 \cdot 1 \equiv 7$, $7 \cdot 7 \equiv -11$, $7 \cdot 11 \equiv 17$, $7 \cdot 13 \equiv -29$, $7 \cdot 17 \equiv -1$,
 $7 \cdot 19 \equiv 13$, $7 \cdot 23 \equiv -19$, $7 \cdot 29 \equiv 23$. Für den Modul 50 ist
 $11 \equiv 19^2$, also 11 theilerfremder quadratischer Rest aber 7 theilerfremder
quadratischer Nichtrest, $\frac{1}{2}\varphi(50) = 10$, $\frac{1}{2}\psi(50) = 1$, $11^{10} \equiv 11^{5 \cdot 2} \equiv$
 $\equiv 161051^2 \equiv 1$, $7^{10} \equiv (-1)^5 \equiv -1$, $\eta(11, 50) = 6$, $\eta(7, 50) = 5$,
 $11 \cdot 1 \equiv 11$, $11 \cdot 3 \equiv -17$, $11 \cdot 7 \equiv -23$, $11 \cdot 9 \equiv -1$, $11 \cdot 11 \equiv 21$,
 $11 \cdot 13 \equiv -7$, $11 \cdot 17 \equiv -13$, $11 \cdot 19 \equiv 9$, $11 \cdot 21 \equiv -19$, $11 \cdot 23 \equiv 3$,
 $7 \cdot 1 \equiv 7$, $7 \cdot 3 \equiv 21$, $7 \cdot 7 \equiv -1$, $7 \cdot 9 \equiv 13$, $7 \cdot 11 \equiv -23$, $7 \cdot 13 \equiv$
 $\equiv -9$, $7 \cdot 17 \equiv 19$, $7 \cdot 19 \equiv -17$, $7 \cdot 21 \equiv -3$, $7 \cdot 23 \equiv 11$.

n. 15. Multiplirt man beide Seiten so wie den Modul m in den
 Congruenzen (XVI) mit derselben positiven Zahl δ , setzt $M = \delta m$ und
 beachtet, dass die Gesammtheit der Producte

$$\delta \cdot r_1, \delta \cdot r_2, \delta \cdot r_3, \dots, \delta \cdot r_{\frac{1}{2}\varphi(m)}$$

die vollständige Reihe derjenigen zum Modul M gehörenden positiven
 absolut kleinsten $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ Reste bilden, welche mit M den grössten
 gemeinsamen Theiler δ besitzen, so erhält man den Satz:

*Die zu Eingang der n. 14 definirte Anzahl $\eta(a, m)$ oder $\eta\left(a, \frac{M}{\delta}\right)$
 ist auch gleich der Anzahl der absolut kleinsten negativen Reste, welche sich
 für den Modul M aus den Producten der zu M theilerfremden Zahl a
 multiplicirt in die zum Modul M gehörenden mit ihm den grössten gemein-
 samen Theiler δ besitzenden positiven absolut kleinsten $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{M}{\delta}\right)$ Resten
 ergeben.*

n. 16. Die zum Modul M gehörenden absolut kleinsten nothwendig
 positiv zu nehmenden Reste also die natürliche Zahlenreihe

entweder (XX) $1, 2, 3, 4, \dots, \frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade ist,

oder (XXI) $1, 2, 3, 4, \dots, \frac{M}{2} - 1$, wenn M gerade ist,

kann auch aufgefasst werden als die Gesammtheit derjenigen zum Modul
 M gehörenden absolut kleinsten positiven Reste; welche mit M je einen

von allen unter $\frac{M}{2}$ liegenden Theilern δ der Zahl M als grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Multiplicirt man mit der zu M theilerfremden Zahl a jede Zahl des obigen Resten-Systems (XX) oder (XXI), bildet von diesen Producten die absolut kleinsten Reste für den Modul M , wendet die hier ange-deutete Gruppierung jener Zahlen nach ihrem jedesmaligen mit M ge-meinsamen grössten Theiler an und benutzt den in n. 15 aufgestellten Satz, so findet man den

n. 17. Lehrsatz: Die Anzahl $H(a, M)$ der absolut kleinsten negativen Reste, welche in Bezug auf den Modul M den Producten

entweder $a.1, a.2, a.3, \dots a \frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade,

oder $a.1, a.2, a.3, \dots a \left(\frac{M}{2} - 1\right)$, wenn M gerade,

congruent sind, wird, wenn die Zahl a zu M theilerfremd ist, gleich

$$(XXII) \quad H(a, M) = \sum_{\delta} \gamma\left(a, \frac{M}{\delta}\right) = \sum_m \gamma(a, m), \quad 1 \leq \delta < \frac{M}{2}, \quad 2 < m \leq M = m\delta$$

worin die eine Summation über die sämmtlichen unter $\frac{M}{2}$ liegenden Theiler δ des Modul M , die andere Summation über die sämmtlichen die Zahl 2 übertreffenden Theiler m des Modul M auszudehnen ist.

Wählt man in diesem Satze die Zahl $a = -1$ und berücksichtigt, dass $\gamma(-1, m) = \frac{1}{2}\varphi(m)$ ist, so erhält man den EULER'schen Summation's Satz für die φ Function. Von diesem Satze werden wir hier aber keinen Gebrauch zu machen haben.

Beispiel. Es ist: $H(7, 60) = 13$, $\sum_{\delta} \gamma\left(7, \frac{60}{\delta}\right) = \gamma(7, 60) + \gamma(7, 30) + \gamma(7, 20) + \gamma(7, 15) + \gamma(7, 12) + \gamma(7, 10) + \gamma(7, 6) + \gamma(7, 5) + \gamma(7, 4) + \gamma(7, 3) = 4 + 2 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 13$ Ferner ist: $H(7, 45) = 9$, $\sum_{\delta} \gamma\left(7, \frac{45}{\delta}\right) = \gamma(7, 45) + \gamma(7, 15) + \gamma(7, 9) + \gamma(7, 5) + \gamma(7, 3) = 4 + 2 + 2 + 1 + 0 = 9$.

n. 18. Ist M gerade, so wird für ein ungerades a

$$\text{entweder } as \equiv +s' > 0 \quad \text{und} \quad a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv \frac{M}{2} - s' > 0 \pmod{M}$$

$$\text{oder} \quad as \equiv -s' < 0 \quad \text{und} \quad a\left(\frac{M}{2} - s\right) \equiv -\frac{M}{2} + s' < 0 \pmod{M}$$

worin s und s' positive unter $\frac{M}{2}$ liegende Zahlen bedeuten.

Die absolut kleinsten negativen Reste werden also nicht anders als paarweise auftreten können, wenn jedes s von $\frac{M}{2} - s$ verschieden also $\frac{M}{2}$ ungerade ist.

Für ein geradzahliges $\frac{M}{2}$ wird

$$a \frac{M}{4} \equiv +\frac{M}{4} \pmod{M}, \quad \text{wenn } a \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist,}$$

$$a \frac{M}{4} \equiv -\frac{M}{4} \pmod{M}, \quad \text{wenn } a \equiv 3 \pmod{4} \text{ ist.}$$

Wir erhalten demnach den Satz:

Für einen geradzahligem Modul M und für ein ungerades a wird die Anzahl $H(a, M)$ der den Producten

$$a \cdot 1, \quad a \cdot 2, \quad a \cdot 3, \quad \dots \quad a \cdot \left(\frac{M}{2} - 1\right)$$

nach dem Modul M congruenten absolut kleinsten negativen Reste eine gerade Zahl sein, $H(a, M) \equiv 0 \pmod{2}$ wenn $M \equiv 2 \pmod{4}$ oder wenn zugleich $M \equiv 0$ und $a \equiv 1 \pmod{4}$ ist; dagegen wird sie ungeradzahlig, $H(a, M) \equiv 1 \pmod{2}$, wenn zugleich $M \equiv 0$ und $a \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Beispiele: $H(7, 30) = 8$, $H(5, 12) = 2$, $H(7, 60) = 13$.

n. 19. Aus der Verbindung der Lehrsätze in n. 17 und 14 folgt

$$(XXIII) \quad H(a, M) = \sum_m \gamma(a, m) \equiv \sum_m \frac{1}{2} \chi(m) \pmod{2}$$

worin \sum_m sich auf alle, die Zahl 2 übertreffenden, Theiler m von M , dagegen \sum'_m sich nur auf diejenigen die Zahl 2 übertreffenden im Modul M enthaltenen Theiler m bezieht, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Wir haben also den Lehrsatz: Die Anzahl $H(a, M)$ derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche nach dem Modul M den Producten

entweder $a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots a \frac{M-1}{2}$, wenn M ungerade,

oder $a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots a \left(\frac{M}{2} - 1\right)$, wenn M gerade,

congruent sind, wird, für ein zu M theilerfremdes a , gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Gesamt-Anzahl aller in absolut kleinsten positiven Resten modulo m dargestellten Lösungen w der Congruenzen $1 \equiv ww \pmod{m}$ für die ganze Reihe derjenigen Moduln m , welche grösser als 2 und Theiler von M sind und zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Beispiel: Es ist $7 \equiv 1 \cdot 1 \pmod{6}$ und $\pmod{3}$ für alle anderen Theiler von 60 ist 7 quadratischer Nichtrest. Ferner ist $1 \equiv 1 \cdot 1 \pmod{4}$ und $\pmod{5}$ und $\pmod{10}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 5 \cdot 5 \pmod{12}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 4 \cdot 4 \pmod{15}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 9 \cdot 9 \pmod{20}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 11 \cdot 11 \pmod{30}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 11 \cdot 11 \equiv 19 \cdot 19 \equiv 29 \cdot 29 \pmod{60}$ also $\sum'_m \frac{1}{2}\phi(m) = \frac{1}{2}\phi(4) + \frac{1}{2}\phi(5) + \frac{1}{2}\phi(10) + \frac{1}{2}\phi(12) + \frac{1}{2}\phi(15) + \frac{1}{2}\phi(20) + \frac{1}{2}\phi(30) + \frac{1}{2}\phi(60) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 15$, endlich ist $H(7, 60) = 13 \equiv 15 \pmod{2}$.

N. 20. Wir beschränken jetzt unsere Untersuchung auf den Fall eines ungeraden M , welches also in der Form

$$(XXIV) \quad M = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_\lambda^{e_\lambda} \dots P_\nu^{e_\nu}$$

dargestellt werden kann, worin $P_1, P_2, \dots P_\lambda, \dots P_\nu$ von einander verschiedene positive Primzahlen und $e_1, e_2, \dots e_\lambda, \dots e_\nu$ irgend welche positive Zahlen bedeuten. Aus der Congruenz (XXIII) folgt dann, wenn

wir auch noch die in x. 6 gefundene Bestimmung von $\phi(m)$ und die übrigen dort ausgesprochenen Lehrsätze anwenden, die Congruenz:

$$(XXV) \quad H(a, M) = \sum_m \chi(a, m) \equiv \sum'_m \frac{1}{2} \phi(m) \equiv \sum''_m \frac{1}{2} \phi(m) = \sum'''_k e_k \pmod{2}.$$

Hierin erstreckt sich die Summation \sum_m über alle Theiler m von M , die Summation \sum'_m über alle diejenigen in M enthaltenen Theiler m , zu welchen a quadratischer Nichtrest ist, die Summation \sum''_m über alle diejenigen in M enthaltenen Theiler m , welche je einzeln keine verschiedene Primzahlen enthalten und zu welchen a quadratischer Nichtrest ist, endlich die Summation $\sum'''_k e_k$ über die in der Darstellung (XXIV) von M vorkommenden Exponenten derjenigen Primzahlen P_k , zu welchen die Zahl a quadratischer Nichtrest ist.

Diese letzte Summe $\sum'''_k e_k$ bedeutet auch die Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in M enthaltenen Primfactoren, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist. Die Congruenz (XXV) gibt also den Lehrsatz:
Die Anzahl $H(a, M)$ derjenigen Producte

$$a \cdot 1, \quad a \cdot 2, \quad a \cdot 3, \quad \dots \quad a \cdot \frac{M-1}{2}$$

welche absolut kleinsten negativen Resten für den ungeradzahligen Modul M congruent sind, wird für ein zu M theilerfremdes a gleichzeitig gerade oder ungerade mit der Anzahl aller derjenigen gleichen und ungleichen in M enthaltenen Primfactoren, zu welchen a quadratischer Nichtrest ist.

Beispiel: Es ist $H(7, 45) = 9$, $\sum \frac{1}{2} \phi(m) = \frac{1}{2} \phi(5) + \frac{1}{2} \phi(15) + \frac{1}{2} \phi(45) = 1 + 2 + 2 = 5$; $\sum'' \frac{1}{2} \phi(m) = \frac{1}{2} \phi(5) = 1 \equiv 5 \equiv 9 \pmod{2}$ für $a = 7$, $M = 45$. Dagegen für $a = 11$, $M = 45$ wird $H(11, 45) = 10$, $\sum \frac{1}{2} \phi(m) = \frac{1}{2} \phi(3) + \frac{1}{2} \phi(9) + \frac{1}{2} \phi(15) + \frac{1}{2} \phi(45) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$, $\sum'' \frac{1}{2} \phi(m) = \frac{1}{2} \phi(3) + \frac{1}{2} \phi(9) = 1 + 1 = 2 \equiv 6 \equiv 10 \pmod{2}$.

N. 21. Es mag noch bemerkt werden, dass die oben benutzten Potenzen von a und b mit dem Exponenten $\frac{1}{2}\varphi(m)$ nicht wesentlich für diese Untersuchung sind, sondern hier nur gebraucht wurden, um an die üblichen Betrachtungen anzuschliessen. Ohne Herbeiziehung derselben wird die Entwicklung noch einfacher. Man hat dann den folgenden Lehrsatz aufzustellen:

Die Anzahl aller Lösungen der Congruenzen

$$(XXVI) \quad -x\left(\frac{M}{\delta} - x\right) \equiv a \pmod{\frac{M}{\delta}} \text{ in ganzen positiven unter } \frac{M}{2\delta} \text{ liegenden Zahlen } x,$$

$$(XXVII) \quad 1 \equiv -x'\left(\frac{M}{\delta} - x'\right) \pmod{\frac{M}{\delta}} \text{ in ganzen positiven unter } \frac{M}{2\delta} \text{ liegenden Zahlen } x',$$

$$(XXVIII) \quad au \equiv -v \pmod{M} \text{ in ganzen positiven unter } \frac{M}{2} \text{ liegenden und mit } M \text{ denselben beliebigen grössten unter } \frac{M}{2} \text{ liegenden gemeinsamen Theiler } \delta \text{ enthaltenden Zahlen } u, v,$$

zusammengenommen ist für ein zu M theilerfremdes a immer eine gerade Zahl.

Es ist leicht zu sehen, dass man u und v anstatt aus dem System der absolut kleinsten positiven Reste des Modul M zu nehmen, sie auch aus irgend einem vollständigen halben Resten-System für den Modul M wählen kann, wenn man nemlich darunter ein System aller solcher Reste versteht, von denen keine zwei eine durch den Modul M theilbare Differenz oder Summe ergeben. Für den Fall, dass a und M ungerade Zahlen bedeuten, ist es häufig von Vortheil die sämmtlichen unter M liegenden positiven entweder geraden oder ungeraden Zahlen als ein solches vollständiges halbes Resten-System für den Modul M zu benutzen.

Der Beweis des Lehrsatzes ergibt sich aus der Multiplication der entsprechenden Seiten aller Congruenzen, welche zunächst entstehen, wenn man sämmtliche Lösungen in jene Congruenzen (XXVI), (XXVII), (XXVIII) einsetzt, nachdem man die beiden Seiten und den Modul der Congruenz $au \equiv -v \pmod{M}$ für jede Lösung durch δ dividirt hat,

und welche ferner noch entstehen, wenn man in die Congruenzen

(XXIX) $y \cdot z \equiv a \pmod{\frac{M}{\delta}}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung y kleiner als z erfüllende Zahlen y, z einsetzt, ebenso in

(XXX) $1 \equiv y' \cdot z' \pmod{\frac{M}{\delta}}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{\delta}$ liegende und die Bedingung y' kleiner als z' erfüllende Zahlen y', z' einsetzt und schliesslich in

(XXXI) $au \equiv v \pmod{M}$ ihre Lösungen durch ganze positive unter $\frac{M}{2}$ liegende und jenen grössten mit M gemeinsamen Theiler δ enthaltende Zahlen u, v einführt und beide Seiten und den Modul M dieser Congruenz für jede Lösung durch δ dividirt.

Die beiden Seiten der durch diese Multiplication sich ergebenden Congruenz besitzen nemlich, wie unmittelbar aus den Congruenz-Systemen (VII), (XII) und (XVI) hervorgeht, gleiche absolute zu $\frac{M}{\delta}$ theilerfremde Zahlenwerthe und müssen, da der Modul $\frac{M}{\delta}$ dieser Congruenz grösser als 2 ist, auch gleiche Vorzeichen haben.

x. 22. Die Begriffe der beiden Anzahlen, welche durch den Lehrsatz des x. 20 zu einander in Beziehung gesetzt werden, sind schon von GAUSS aufgestellt. Nachdem er im März 1795 (wie er selbst in sein Handexemplar der Diss. Arr. eingeschrieben, G.-Werke Bd. I. Seite 476 meine Bemerkungen) das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durch Induction gefunden hatte, welches er in Art. 131 der im Jahre 1801 herausgegebenen Disquiss. Arr. unter verschiedenen Formen darstellt, gerieth er am 29. Apr. 1796 (G.-Werke Bd. I. Seite 476) auf die Betrachtung der Anzahl der in einer gegebenen ungeraden Zahl P enthaltenen gleichen und verschiedenen Primfactoren, zu welchen eine andere gegebene Zahl Q quadratischer Nichtrest ist. In Art. 133 der Disquiss.

ARR. zeigt er, dass wenn zwischen allen in der einen gegebenen ungeraden Zahl Q enthaltenen Primzahlen einerseits und allen in der anderen gegebenen ungeraden Zahl P enthaltenen Primzahlen andererseits das Reciprocitäts-Gesetz für die quadratischen Reste besteht, dann auch das analoge Reciprocitäts-Gesetz für die eben definirte Anzahl (Q, P) und für diejenige entsprechende Anzahl (P, Q) gilt, welche sich auf dieselben beiden gegebenen Zahlen aber nach ihrer Umwechslung bezieht. Der Begriff der hier definirten Anzahl ist dann für GAUSS ein wesentliches Hilfsmittel, um in den Artikeln 134 bis 136 den vollständigen Beweis für das Reciprocitäts-Gesetz der quadratischen Reste durchzuführen.

JACOBI hat im Jahre 1837 (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaft zu Berlin Seite 135 »Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie«), wie es scheint ohne sich der betreffenden Stelle bei GAUSS bewusst zu sein, die gleichbedeutende Characteristik $\left(\frac{Q}{P}\right)$ eingeführt, welche den Werth entweder -1 oder $+1$ besitzt, je nachdem Q entweder zu einer ungeraden oder zu einer nicht ungeraden Anzahl von gleichen und verschiedenen in P enthaltenen Primfactoren quadratischer Nichtrest ist. JACOBI nennt dies das verallgemeinerte LEGENDRE'sche Zeichen und definirt es als das Product von allen LEGENDRE'schen Zeichen $\left(\frac{Q}{p_1}\right)\left(\frac{Q}{p_2}\right)\left(\frac{Q}{p_3}\right) \dots \left(\frac{Q}{p_v}\right)$, worin die $p_1, p_2, p_3, \dots p_v$ die Gesammtheit aller derjenigen gleichen und verschiedenen Primfactoren ausmachen, deren Product gleich P ist.

Auch der Begriff der anderen in dem Lehrsatz des n. 20 vorkommenden Anzahl, nemlich der Anzahl derjenigen absolut kleinsten negativen Reste, welche sich für eine zusammengesetzte ungerade Zahl M als Modul aus den Producten einer zu M theilerfremden Zahl a multiplicirt in jeden einzelnen absolut kleinsten positiven Rest ergeben, ist von GAUSS untersucht und dafür der Reciprocitäts-Satz bewiesen in Art. 2 der Abhandlung »Theorematis Fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae« 1817 Febr. (G.-Werke Bd. II. S. 52.).

Von dem in n. 20 ausgesprochenen Satze hat GAUSS den speciellen Fall, wenn M eine Primzahl bedeutet, aufgestellt und darauf schon seinen dritten Beweis des Reciprocitäts-Satzes gegründet; aber der allgemeine Lehrsatz für eine zusammengesetzte Zahl M scheint sich ihm entzogen zu haben.

Meine Auffindung dieses Satzes ist in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876 Seite 330 veröffentlicht. Herr KRONECKER hat hieran mehrere Entwicklungen angeschlossen, in welcher er auch ausspricht, dass er vor meiner Mittheilung diesen Satz selbst gefunden habe. Er stützt seinen Beweis des Satzes auf die Kenntniss des vorausbewiesenen Reciprocitäts-Satzes.

N. 23. Die in N. 21 aufgestellte Form des Lehrsatzes halte ich deshalb für beachtenswerth, weil darin und in dem Beweise wesentlich nur die Abzählung der Auflösungen von bilinearen und von linearen Congruenzen auftritt und weil in meinem Beweise (1879) des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste keine andere Untersuchung als die Abzählung der Lösungen von linearen Congruenzen in Anwendung gebracht wird. Eine genaue Vergleichung dieses Beweises mit dem dritten (1808) und dem fünften (1817) Beweise von GAUSS, dem geometrischen Beweise von EISENSTEIN (1844), dem Beweise von Herrn ZELLER (1872), dem arithmetischen Beweise von Herrn KRONECKER (1876) und den beiden Beweisen von Sign. GENOCCHI (1852 und 1880) zeigt unter Benutzung des auf Seite 45 meiner Abhandlung »Bestimmung des quadratischen Rest-Characters« Göttingen 1879, ausgesprochenen Lehrsatzes, dass alle diese Beweise auf die Betrachtung der Anzahl verschiedenartiger Lösungen linearer Congruenzen zurückgeführt werden können.

N. 24. Es ist bemerkenswerth, dass diejenigen Gleichungen, welche den obigen bilinearen Congruenzen (VII) entsprechen, schon von EULER mehrfach, wenn auch nur für den Fall einer Primzahl m , angewendet worden sind: *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos.* §. 20. §. 30. *Op. anal.* I. 1772. — *Disquisitio accuratior circa residua ex divisione quadratorum altiorumque potestatum per numeros primos relicta* §. 29. §. 50. *Op. anal.* Exhib. 1772. Maji 18. — *Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia* §. 25. *N. comment. Petrop.* XVIII. 1773 Exhib. 1772. Maj. 18. — Diese Abhandlungen sind abgedruckt: *EULERI commentationes arithmeticae collectae.* Edit. FUSS. *Petrop.* 1849. Tom. I. pag. 480, 482, 494, 505, 519. — EULER nennt für den Fall $a = 1$ und $m = p$ in der Gleichung $\alpha\alpha' = 1 + np$ die Zahlen α und α' *residua sociata*.

Göttingen 1882 November 9.

SUR UN GROUPE DE THÉORÈMES ET FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE

PAR

H. G. ZEUTHEN.

Lorsqu'on détermine le nombre de solutions d'une question algèbro-géométrique, soit par les procédés de l'élimination algébrique, soit par les considérations géométriques plus expéditives qui la remplacent, celles de l'intersection des courbes ou du principe de correspondance, la difficulté principale qui se présente est la détermination de la multiplicité des solutions de différente nature. Pour surmonter cette difficulté on s'est servi parfois d'une méthode *indirecte*, en déduisant par différentes voies des expressions différentes du même nombre qui contiennent des coefficients inconnus, et en se servant de l'égalité de ces expressions pour déterminer les coefficients; ⁽¹⁾ mais on a aussi des méthodes *directes*. Il serait trop long de citer tous les procédés, inventés par d'éminents géomètres ⁽²⁾ pour le dénombrement des intersections confondues de deux courbes; je me bornerai à rappeler que la plupart des méthodes reposent sur la considération des ordres des divergences infiniment petites des branches des courbes, ou bien des ordres de contact de ces branches. Des

⁽¹⁾ Dans ma thèse de doctorat 1865 sur *les systèmes de coniques* j'ai fait un usage régulier de ce procédé, qui m'a été utile aussi, à côté des déterminations directes, dans beaucoup d'autres recherches. M. SCHUBERT s'en est servi aussi dans ses nombreux travaux, dans le premier sans avoir vu l'usage que j'en avais fait déjà.

⁽²⁾ M. M. CAYLEY, DE LA GOURNERIE, PAINVIN, HALPHEN, NÖTHER, STOLZ, SMITH.

considérations analogues peuvent servir au dénombrement des solutions coïncidentes résultant du principe de correspondance.⁽¹⁾

Cependant ces méthodes de dénombrement demandent toujours un certain travail. Pour déterminer le nombre de points d'intersection coïncidents entre eux de deux branches de courbes tangentes entre elles, il ne suffit pas de connaître les ordres d'infiniment petites qui sont donnés indirectement par les degrés de multiplicité de ces branches et par les nombres de leurs points d'intersection avec la tangente qui coïncident entre eux; il ne suffit pas même, que les branches soient définies par les formes des séries qui les représentent: il faut connaître aussi les coefficients de ces séries, afin de pouvoir déterminer aussi les ordres de leurs différences. De même, en appliquant le principe de correspondance, on a besoin, pour déterminer le nombre de coïncidences de points x et y qui ont lieu en un point a , de connaître, non seulement le nombre des points y qui coïncident avec a en même temps que x , et celui des points x qui coïncident avec lui en même temps que y , mais aussi les ordres des distances infiniment petites xy des points correspondants qui sont infiniment près de a .

Il est donc clair qu'il faut préférer à ces procédés, où il est possible, des formules où les dénombrements ne demandent ni ces recherches particulières d'ordres d'infiniment petites, ni un autre travail équivalent et aussi pénible. M. HALPHEN⁽²⁾ a montré que, dans les applications de la formule contenant une extension du théorème sur la conservation du genre que j'ai donnée dans le 3^{me} vol. des *Mathematische Annalen* aux cas où il y a des solutions multiples, le dénombrement de celles-ci se fait immédiatement sans aucune recherche d'ordres d'infiniment petites. M. M. HALPHEN⁽³⁾ et SMITH⁽⁴⁾ ont montré qu'il existe des relations jouissant de la même

(¹) J'ai donné des méthodes de ce dénombrement dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* 1867 et à la page 47 de mon *Mémoire sur les systèmes de courbes planes*, inséré aux *Mémoires de l'Académie danoise des sciences*, 5^{me} série t. X.

(²) *Bulletin de la Société Mathématique de France* t. V., p. 9.

(³) »*Sur les points singuliers des courbes algébriques planes*», publié en 1877 au tome 26 des *Mémoires présentés par divers savants*; mais l'auteur avait déjà à la présentation de ce mémoire consigné les principaux résultats dans une communication publiée dans le *Compte rendu* du 20 avril 1874.

(⁴) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. VI.

propriété, et entre les nombres de points d'intersection confondus et de tangentes communes confondues de deux courbes, et entre ceux des points doubles confondus et des tangentes doubles confondues d'une seule courbe.

Je me propose d'établir ici entre ces différents théorèmes une connexion servant à montrer l'importance de la propriété commune dont je viens de parler. Je prendrai pour point de départ un théorème qui s'est présenté à M. HALPHEN dans le courant de ses recherches sur les points d'intersection et tangentes communes confondus,⁽¹⁾ et auquel aussi d'autres géomètres sont parvenus indépendamment de lui et très-peu après lui.⁽²⁾ Je montrerai (n° 5) que, grâce à ce théorème fondamental, que je vais énoncer dans le n° 1, et dont je donnerai aussi une autre application (nos 3 et 4), ma démonstration originaire de l'extension du théorème sur le genre conduit immédiatement à la propriété relative aux solutions multiples que M. HALPHEN a établie autrement.

Les autres théorèmes de M. M. HALPHEN et SMITH dont je viens de parler se présenteront ensuite comme des applications de la formule contenant cette extension du théorème sur le genre (nos 6—8), et serviront ainsi d'exemples de la portée que cette formule a obtenue par la découverte de M. HALPHEN.

1. Le théorème que nous avons appelé fondamental pour les recherches actuelles peut être énoncé de la manière suivante:

«Soit donné un point singulier d'une courbe algébrique où toutes les branches ont la même tangente, et désignons par ν le degré de multiplicité ponctuelle de la courbe en ce point, c'est à dire: le nombre de points d'intersection confondus de la courbe avec une droite quelconque passant par lui, et par ν' le degré de multiplicité tangentielle, c'est à dire: le nombre de tangentes confondues qui passent par un point quelconque de la tangente donnée: alors $\nu + \nu'$ des points d'intersection de la tangente coïncident avec le point donné, et $\nu + \nu'$ des tangentes qui passent par le point coïncident avec la tangente donnée.»

On démontre sans difficulté ce théorème pour une seule branche complète en introduisant des coordonnées tangentielles dans la série qui

(¹) Voir à la page 42 du Mémoire que nous venons de citer.

(²) M. M. STOLZ et NÖTHER dans les t. VIII et IX des *Mathematische Annalen*. Le travail du premier de ces savants est daté du 16 mai 1874.

la représente dans un système de coordonnées ponctuelles.⁽¹⁾ L'extension au cas où plusieurs branches complètes sont tangentes entre elles se fait immédiatement.

2. Donnons une forme algébrique au théorème géométrique que nous venons d'énoncer.

Soit donnée une équation $f(x, y) = 0$ à deux variables x et y , du degré m_1 en x et du degré m_2 en y , ou, ce qui est plus commode, une équation homogène du degré m_1 en x_1 et x_2 , et homogène du degré m_2 en y_1 et y_2 . Si l'on détermine par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à cette équation des droites de deux faisceaux aux centres P et Q (et si l'on choisit les droites fixes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ ainsi que la droite PQ ne corresponde pas à elle-même), l'équation, que nous écrirons toujours $f(x, y) = 0$, représentera une courbe de l'ordre $n = m_1 + m_2$ ayant un point m_1 -tuple à P et un point m_2 -tuple à Q .

En égalant à zéro le discriminant $\zeta(x)$ de $f(x, y)$ par rapport à y , on aura l'équation en x qui représente les tangentes passant par P , y compris les droites joignant P aux autres points multiples, à l'exception de Q , autant de fois que la courbe $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$ — qui sera la polaire de P si la droite $y_2 = 0$ coïncide avec la droite PQ — a d'intersections confondues en ces points, et non compris les tangentes en P à moins qu'elles n'aient plus de $m_1 + 1$ intersections confondues. Le discriminant $\phi(y)$ par rapport à x représente de la même manière les tangentes passant par Q . Les ordres de ces deux discriminants $\zeta(x)$ et $\phi(y)$ se trouvent par la première formule Pluckerienne.⁽²⁾ Si P et Q sont les seuls points multiples de la courbe auxiliaire, celle-ci sera de la classe:

(¹) Voir aux endroits cités, ou à la page 212 du vol. X des *Mathematische Annalen*. M. CAYLEY s'est servi en 1866 du même procédé (*On the Higher Singularities of a Plane Curve*. *Quart. Journ.* vol. VII), mais sans énoncer directement le théorème dont nous parlons ici.

(²) Remarquons, du reste, que, dans ce qui suit, on se sert seulement de la *différence* des ordres des discriminants, qu'on obtient, sans aucune application des équations Pluckeriennes, en égalant les nombres totaux des tangentes à la courbe $f = 0$ qui passent par P et Q . La même observation a permis une simplification de la démonstration de M. BERTINI du théorème sur la conservation du genre (*Comptes rendus t. LXX p. 742*), que je rappelle parce qu'elle me semble montrer qu'il ne soit pas — comme dit M.

$$n' = (m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 1) - m_1(m_1 - 1) - m_2(m_2 - 1) = 2m_1m_2.$$

Supposant encore qu'aucune droite par P ne rencontre la courbe en plus de $m_1 + 1$ points coïncidant avec P , on aura $2m_1(m_2 - 1)$ tangentes qui passent par P sans avoir P pour point de contact. Ce nombre est donc l'ordre du discriminant $\varphi(x)$, et il ne cesse pas de l'être dans les cas où les suppositions faites ici ne sont pas en vigueur. De même, le discriminant $\phi(y)$ est de l'ordre $2m_2(m_1 - 1)$.

Considérons maintenant un point singulier ou simple M de la courbe. Si aucune tangente en M ne passe ni par P ni par Q , ce point correspond à des facteurs de la même multiplicité (zéro, si le point est simple) de tous les deux discriminants; mais si MP a ν_2 points d'intersection coïncidant avec M , et si MQ en a ν_1 , et si l'on désigne par ξ le degré de multiplicité du facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)$ du discriminant $\varphi(x)$ qui détermine PM , et par η le degré de multiplicité du facteur $(b_2y_1 - b_1y_2)$ du discriminant $\phi(y)$ qui détermine QM , il résulte du n° 1 que l'on a:

$$(1) \quad \xi - \eta = \nu_2 - \nu_1,$$

les deux membres de cette équation indiquant de combien le degré de multiplicité tangentielle de MP dépasse celui de MQ .

En appliquant la formule (1) à tous les points de la courbe, et en substituant à $\sum \xi$ et $\sum \eta$ les expressions $2m_1(m_2 - 1)$ et $2m_2(m_1 - 1)$ des ordres des discriminants, on trouve

$$(2) \quad 2(m_2 - m_1) = \sum (\nu_2 - \nu_1),$$

où il suffit évidemment d'étendre la sommation aux points de la courbe qui donnent des valeurs différentes entre elles de ν_1 et ν_2 .

SCHUBERT dans les *Mathematische Annalen* t. XVI p. 180 — une »*berechtigte Forderung*» à la simplicité géométrique de la démonstration de ce théorème qu'elle repose seulement sur le principe de correspondance. On verra du présent article que je ne regarde pas même, dans ce cas, l'usage de ce principe comme avantageux s'il y a des singularités supérieures, ni non plus pour l'extension du théorème. Je saisis l'occasion pour faire observer que la faute, montrée par M. SCHUBERT, d'une démonstration qui porte mon nom dans le livre de Clebsch-Lindemann (p. 681) n'appartient pas à moi, ce que montre aussi la note de M. Lindemann en bas de la page citée.

Pour donner un sens purement algébrique aux formules (1) et (2) nous avons seulement à remarquer encore que ν_1 (ou ν_2) est le degré de multiplicité du facteur $a_2x_1 - a_1x_2$ (ou $b_2y_1 - b_1y_2$) qu'obtient $f(x, y)$ pour $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (ou $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$).

3. Appliquons premièrement la formule (1) au cas où $m_1 = m_2 = 2$, c'est à dire à une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables. Alors les deux discriminants seront des formes binaires quartiques.

Supposons maintenant que le discriminant $\varphi(x)$ contient le facteur quadratique $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$. En égalant ce facteur à zéro, on rendra la forme donnée égale à un carré $(b_2y_1 - b_1y_2)^2$.

Aux valeurs $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$ et $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}$ correspond ici, dans la formule (1), $\xi = 2$, $\nu_2 = 2$, et on a évidemment $\nu_1 \geq 1$. Il en résulte que $\eta \geq 1$, mais alors il faut que pour $b_2y_1 - b_1y_2 = 0$ la forme donnée ait le facteur $(a_2x_1 - a_1x_2)^2$, ou bien que $\nu_1 = 2$, $\eta = 2$.

Les deux discriminants auront donc en même temps deux facteurs égaux ou bien, leurs discriminants doivent s'évanouir en même temps. Ces discriminants de $\varphi(x)$ et $\phi(y)$, qui sont des fonctions rationnelles des coefficients de la forme donnée, sont donc égaux, à un facteur numérique près, qui doit être, à cause de la symétrie, égal à ± 1 ; en choisissant un simple exemple⁽¹⁾ on voit qu'il a la valeur de $+1$. La forme donnée représente, dans le cas où le discriminant commun aux deux discriminants $\varphi(x)$ et $\phi(y)$ est égal à zéro, une courbe à un nouveau point double (à côté de P et Q).

Note. Il en sera autrement dans les cas où m_1 ou m_2 est > 2 . Si $m_2 > 2$ il devient possible que $\nu_2 = 3$, et si $m_2 > 3$ il sera possible qu'en égalant à zéro deux facteurs égaux entre eux du discriminant $\varphi(x)$ on réduise la forme donnée à contenir deux couples de facteurs égaux entre eux. En faisant usage de faits connus de la théorie des systèmes de courbes,⁽²⁾ on trouve que les discriminants des deux discriminants $\varphi(x)$

(¹) Si la forme est $(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)y_1y_2 + (b_1y_1^2 + b_2y_2^2)x_1x_2$ le discriminant des deux discriminants sera, à un constant numérique près, égal à $a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2(a_1a_2 - b_1b_2)^2$ — ce qu'on peut voir sans le calculer.

(²) Voir mon article sur les systèmes de courbes planes dans le vol. X des Mémoires de l'Académie Danoise des Sciences (5^{me} série).

et $\phi(y)$ ont en général un facteur simple commun correspondant aux cas où la courbe représentée par la forme donnée a un point double, et que chacun d'eux contient encore deux fois un facteur correspondant aux cas où une tangente double, et trois fois un facteur correspondant aux cas où une tangente stationnaire, passe par P ou Q .

4. Nous déduirons des conséquences ultérieures du fait que nous venons de trouver, que les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont le même discriminant. Désignons les invariants des deux discriminants du quatrième ordre $\varphi(x)$ et $\phi(y)$ par $i_1, j_1; i_2, j_2$, les lettres ayant les mêmes significations que dans les Leçons de CLEBSCH-LINDEMAN. Alors on a identiquement

$$i_1^3 - 6j_1^2 = i_2^3 - 6j_2^2,$$

ou bien

$$(i_1 - i_2)(i_1^2 + i_1i_2 + i_2^2) = 6(j_1 - j_2)(j_1 + j_2),$$

où i_1 et i_2 sont des fonctions rationnelles du quatrième degré, j_1 et j_2 des fonctions rationnelles du sixième degré, des coefficients de la forme donnée $f(x, y)$; car les coefficients de ses deux discriminants sont du second degré. Le second facteur du premier membre ne peut être décomposé en des facteurs rationnels, à moins que ceux-ci ne soient aussi des facteurs de i_1 et i_2 , et par conséquent aussi de $i_1 - i_2$. Il s'ensuit, que chacun des deux facteurs du sixième degré du second membre soit aussi facteur de $i_1 - i_2$, qui n'est que du quatrième degré. $i_1 - i_2$ est donc égal à zéro, et par conséquent aussi $j_1 - j_2$ ou $j_1 + j_2$. On a donc identiquement $i_1 = i_2, j_1 = \pm j_2$. Un exemple⁽¹⁾ montre qu'il faut prendre le premier signe.

Nous avons donc démontré que les deux discriminants d'une forme binaire et du second ordre en deux couples de variables ont les mêmes invariants.

Nous avons énuméré ailleurs⁽²⁾ les principales applications géomé-

(¹) Dans l'exemple de la première note au n° 3 on aura

$$j_1 = j_2 = \frac{8}{9}(a_1a_2 + b_1b_2)(a_1a_2 - 2b_1b_2)(2a_1a_2 - b_1b_2)$$

(²) Proceedings of the London Mathematical Society vol. X p. 196.
Acta mathematica. I.

triques de ce théorème, qui se présente déjà dans la transformation d'EULER de la première intégrale elliptique.

5: Revenons au cas général. La formule (2) du n° 2 s'applique immédiatement à la correspondance de deux courbes unicursales dont les points correspondants sont déterminés par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à $f(x, y) = 0$.

A un point x de l'une correspondent m_2 points y de l'autre, et à un point y correspondent m_1 points x . Pour une couple de points correspondants a et b , ν_1 désigne le nombre des points x qui coïncident avec a lorsque y coïncide avec b , et ν_2 le nombre des points y qui coïncident avec b , lorsque x coïncide avec a .

La généralisation de la même formule qui la rend applicable à la correspondance des points de deux courbes quelconques se fait par une application très-simple de la formule trouvée elle-même. Soit donnée une relation entre les points x et y de deux courbes algébriques des ordres n_1 et n_2 , des classes n'_1 et n'_2 etc., telle qu'à un point x correspondent μ_2 points y , et à un point y , μ_1 points x . Joignons le point mobile x de la première courbe à un point fixe P , et les points correspondants y à un point fixe Q : alors il existe entre les faisceaux Px et Qy une relation — représentée de la manière indiquée dans le n° 2 par le lieu des points d'intersection des droites Px et Qy — telle qu'à toute droite Px correspondent $m_2 = n_1 \cdot \mu_2$ droites Qy , et à toute droite Qy correspondent $m_1 = n_2 \cdot \mu_1$ droites Px . Cherchons, pour faire usage de la formule (2), les droites Px , telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes Qy coïncident entre elles, et les droites Qy , telles que deux ou plusieurs des droites correspondantes Px coïncident entre elles.

Des droites Qy correspondant à une droite Px peuvent coïncider des trois manières suivantes:

1° La droite Px rencontre la première courbe en des points $x', x'' \dots x^{(r)}$ correspondant *respectivement* à des points $y', y'' \dots y^{(r)}$ d'une droite passant par Q . Alors on aura entre cette droite et Px une correspondance représentée, dans le second membre de l'équation (2), par les nombres $\nu_1 = \nu_2 = r$, de façon que cette correspondance n'y ait aucune influence.

2° La droite Px rencontre la première courbe en plusieurs points x coïncidant avec un point O . Alors il n'est pas nécessaire que les groupes

des μ_2 points correspondants coïncident entre eux; mais cette coïncidence a lieu toujours si les points x appartiennent à la même branche complète. En effet, les coordonnées des points voisins de O sur cette branche s'expriment par une variable t au moyen de séries à puissances entières et croissantes, le point O correspondant à la valeur $t = 0$; car telle est la définition d'une branche complète. Le groupe des μ_2 points y qui correspondent à un point mobile x de la branche, dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point x , par conséquent aussi de la variable t . Il ne correspond donc aussi qu'un seul groupe à $t = 0$, et à deux points coïncidant avec O deux groupes coïncidant entre eux. Il est évident de plus qu'en même temps que x parcourt la première courbe d'une manière continue, les μ_2 points y qui y correspondent se mouvront d'une manière continue sur l'autre courbe. Aucun d'eux ne peut passer d'une branche complète d'un point singulier à une autre; car on peut faire correspondre d'une manière uniforme à la seconde courbe une nouvelle courbe où les différentes branches complètes sont remplacées par des points distincts, et par conséquent un passage d'une branche à une autre par un mouvement discontinu. Il s'ensuit qu'on peut regarder, dans la recherche actuelle, les points de l'une ou l'autre des deux courbes qui coïncident *sans* appartenir à la même branche complète comme des points distincts.

3° La droite Px passe par un point x auquel correspond un groupe de points y dont plusieurs coïncident entre eux.

Nous voyons ainsi que, pour avoir tous les termes différents de zéro du second membre de l'équation (2), il suffit de considérer la correspondance d'une droite par P rencontrant une seule branche de la première courbe en ρ_1 points x coïncidant avec un point fixe a , et d'une droite par Q rencontrant une seule branche de la seconde courbe en ρ_2 points y coïncidant avec un point fixe b , et de supposer que ν_2 des μ_2 points y qui correspondent à a coïncident avec b , et ν_1 des μ_1 points x qui correspondent à b coïncident avec a . Alors on obtient

$$(3) \quad 2(n_1\mu_2 - n_2\mu_1) = \sum (\rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1),$$

où la somme \sum est étendue à toutes les couples de points correspondants des deux courbes qui donnent des termes différents de zéro — et à autant d'autres qu'on veut. Afin d'y distinguer l'influence des singularités

des courbes de celle de la nature de la correspondance, nous ferons usage de la transcription suivante

$$(4) \quad \rho_1 \nu_2 - \rho_2 \nu_1 = (\rho_1 - 1) \nu_2 - (\rho_2 - 1) \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1).$$

Pour le premier terme $(\rho_1 - 1) \nu_2$ il suffit d'étendre la sommation à tous les points a de la première courbe où une seule branche est rencontrée par une droite passant par P en plus d'un point ($\rho_1 > 1$), et à tous les points de la seconde courbe qui y correspondent. Or la somme des valeurs des multiplicités ν_2 des points b correspondant à chacun de ces points a est égale à μ_2 . On obtient ainsi, dans la formule (3), le terme

$$\mu_2 \cdot \sum_1 (\rho_1 - 1),$$

la sommation \sum_1 étant étendue ici, et dans ce qui suit, à tous les points de la courbe (x) qui donnent des termes différents de zéro.

On obtient de la même manière le terme

$$- \mu_1 \cdot \sum_2 (\rho_2 - 1),$$

la sommation \sum_2 étant étendue à tous les points de la courbe (y) qui donnent des termes différents de zéro.

Il restera encore le terme

$$\sum (\nu_2 - \nu_1)$$

où la sommation — exactement comme dans le cas de deux courbes unicursales — peut être étendue à tous les cas où deux ou plusieurs points correspondant à un seul point coïncident entre eux.

On parvient ainsi à la formule suivante

$$(5) \quad \sum (\nu_2 - \nu_1) = \mu_1 \left[\sum_2 (\rho_2 - 1) - 2n_2 \right] - \mu_2 \left[\sum_1 (\rho_1 - 1) - 2n_1 \right],$$

où le facteur de μ_1 (ou μ_2) dépend seulement de la courbe (y) (ou (x)).

Le point P pouvant être un point quelconque du plan, on peut supposer qu'il ne se trouve ni sur une tangente singulière ni sur la tangente en un point singulier de la courbe (x) . $\sum_1 (\rho_1 - 1)$ est donc la somme de la classe n'_1 de la courbe (x) et de $\sum_1 (\sigma_1 - 1)$ où σ_1 est le degré de multiplicité d'une branche complète quelconque de la courbe (x) .

On pose

$$n'_1 + \sum_1 (\sigma_1 - 1) - 2n_1 = 2(p_1 - 1),$$

où p_1 est appelé le *genre* de la courbe (x) . En faisant de même pour la courbe (y) , on aura la formule

$$(6) \quad \sum (\nu_2 - \nu_1) = 2\mu_1(p_2 - 1) - 2\mu_2(p_1 - 1).$$

Dans le cas où toutes les valeurs de ν_1 et ν_2 restent < 3 on peut substituer au premier membre de cette équation la différence du nombre des cas où deux points y correspondant à un seul point x coïncident entre eux, et de celui où deux points x correspondant à un seul point y coïncident, et on obtiendrait ainsi mon extension originaire du théorème sur la conservation du genre. La formule qu'on trouve alors est encore applicable au cas général si l'on regarde comme solutions multiples les couples de points correspondants où ν_1 ou ν_2 est > 2 ; mais il est évidemment le plus simple d'employer alors immédiatement la formule (6), qui est due à M. HALPHEN.

6. A cause de la circonstance que l'application de la formule (6) ne demande aucune détermination de coefficients inconnus dépendant des ordres de quantités infiniment petites, elle est à préférer — quand il est possible d'en faire usage — aux applications du principe de correspondance. Nous donnerons quelques exemples servant à montrer cet avantage.

On sait que deux courbes des ordres n_1 et n_2 se rencontrent en $n_1 \cdot n_2$ points. La détermination de ces points dépendant d'une élimination, et le nombre de ceux qui coïncident avec un point de contact de branches des deux courbes dépendant des ordres de distances infiniment petites, il ne sera pas possible de déterminer ce dernier nombre par la formule (6). De même il sera impossible de déterminer immédiatement par la formule (6) le nombre des tangentes communes à deux courbes qui

coïncident entre elles. Mais après avoir déterminé l'un de ces nombres, il sera possible d'en déduire l'autre par la formule (6), appliquée à la recherche d'une expression de la différence $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$ des nombres des tangentes communes et des points d'intersection des deux courbes.

Etablissons, à cet effet, la correspondance suivante: la tangente à la première courbe (x) en un point x passe par les points correspondants y de l'autre. Alors on a, en faisant usage des notations du n° 5,

$$(7) \quad \mu_1 = n'_1, \quad \mu_2 = n_2.$$

En substituant, dans la formule (6), ces valeurs, ainsi que

$$2(p_1 - 1) = n_1 + \sum_1 (\sigma'_1 - 1) - 2n'_1,$$

où σ'_1 est le degré de multiplicité tangentielle d'une branche complète quelconque de la courbe (x) , et qui résulte de l'expression déjà donnée du genre, si l'on observe que deux courbes qui sont des polaires réciproques doivent être du même genre, et

$$2(p_2 - 1) = n'_2 + \sum_2 (\sigma_2 - 1) - 2n_2,$$

on la réduira à

$$(8) \quad n'_1 n'_2 - n_1 n_2 = \sum (\nu_2 - \nu_1) - n'_1 \sum_2 (\sigma_2 - 1) + n_2 \sum_1 (\sigma'_1 - 1).$$

Pour trouver les termes de la somme $\sum (\nu_2 - \nu_1)$ qui sont différents de zéro, il faut distinguer les quatre espèces suivantes pour la correspondance de x et y :

1° Ni le point x ne coïncide avec y , ni la tangente en x avec la tangente en y : alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \quad \nu_2 = \sigma_2.$$

2° Le point x coïncide avec y ; les tangentes aux branches auxquelles appartiennent ces points sont différentes entre elles: alors on a (n° 1)

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \quad \nu_2 = \sigma_2.$$

3° La tangente à la branche à laquelle appartient x coïncide avec la tangente à la branche à laquelle appartient y ; mais ces deux points de contact sont distincts entre eux; alors on a

$$\nu_1 = \sigma'_1, \quad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

4° Les branches auxquelles appartiennent x et y sont tangentes entre elles, x et y coïncidant avec le point de contact; alors on a

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \quad \nu_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

Pour trouver une expression plus simple du second membre de l'équation (8), il est le plus commode de réunir, pour toute couple de points correspondants x et y où, du moins, une des différences $\nu_2 - \nu_1$, $\sigma_2 - 1$ ou $\sigma'_1 - 1$ est différente de zéro, la valeur de $\nu_2 - \nu_1$ aux termes correspondants de $-n'_1 \sum_2 (\sigma_2 - 1) + n_2 \sum_1 (\sigma'_1 - 1)$, c'est à dire à la valeur de $(\sigma_2 - 1)$ qui appartient à y multipliée par le nombre pour lequel compte la tangente en x dans celui des n'_1 tangentes à la courbe (x) qui passent par y — et prise au signe *moins* — et à la valeur de $(\sigma'_1 - 1)$ qui appartient à x multipliée par le nombre pour lequel compte y dans celui des n_2 intersections de la tangente en x avec la courbe y .⁽¹⁾

En appliquant successivement ce procédé aux quatre espèces de correspondance on trouve (en donnant aux cas respectifs les mêmes n^{os} que tout à l'heure)

$$1^\circ \sigma_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = 0$$

$$2^\circ \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + \sigma_2(\sigma'_1 - 1) = -\sigma_1 \sigma_2$$

$$3^\circ \sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma'_1 - \sigma'_1(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1 \sigma'_2$$

$$4^\circ \sigma_2 + \sigma'_2 - \sigma_1 - \sigma'_1 - (\sigma_1 + \sigma'_1)(\sigma_2 - 1) + (\sigma_2 + \sigma'_2)(\sigma'_1 - 1) = \sigma'_1 \sigma'_2 - \sigma_1 \sigma_2$$

La sommation des termes de la seconde espèce devant être étendue à tous les points d'intersection de branches complètes des deux courbes qui ne sont pas des points de contact, celle des termes de la troisième espèce à toutes les tangentes communes qui ont des points de contact distincts, et celle de la quatrième espèce à tous les points de contact, la somme totale sera égale à $S'(\sigma'_1 \sigma'_2) - S(\sigma_1 \sigma_2)$, où la somme S est

⁽¹⁾ Dans les cas où la position des courbes n'a rien de particulier, on trouve seulement que la différence des nombres des tangentes communes et des points d'intersection est égale à $n'_1 n'_2 - n_1 n_2$. Il suffirait de considérer ici, à côté de ce cas général, celui où deux branches complètes sont tangentes entre elles. Voulant montrer avant tout la méthode, nous ne nous y sommes pas bornés.

étendue à tous les cas où des branches complètes ont un point commun, S' à tous ceux où elles ont une tangente commune. En commençant par n'exécuter la première de ces sommations que pour les branches passant par un seul point, on aura pour somme $\alpha_1\alpha_2$, où α_1 et α_2 sont les *multiplicités totales de ce point appartenant aux deux courbes*, de façon que $S(\sigma_1\sigma_2) = S(\alpha_1\alpha_2)$, où aussi la somme S est étendue à tous les points communs aux deux courbes. On obtient de même $S'(\sigma'_1\sigma'_2) = S'(\alpha'_1\alpha'_2)$ où α'_1 et α'_2 sont les *degrés totaux de multiplicité d'une tangente commune aux deux courbes*, et où la somme S' s'étend à toutes ces tangentes. On trouve ainsi

$$(9) \quad n'_1n'_2 - n_1n_2 = S'(\alpha'_1\alpha'_2) - S(\alpha_1\alpha_2).$$

Le seul résultat contenu à cette formule qui ne soit pas évident immédiatement, celui que la différence du nombre des tangentes communes à deux courbes qui coïncident avec la tangente à deux branches complètes tangentes entre elles, et du nombre des points d'intersection coïncidant avec leur point de contact, est égale à $\sigma'_1\sigma'_2 - \sigma_1\sigma_2$, est dû à M. HALPHEN⁽¹⁾, dont la démonstration — de même que celle de M. SMITH⁽²⁾ — diffère entièrement de celle que nous venons d'en donner.

7. Pour déduire les *formules de Plücker* on se sert ordinairement, soit d'intersections de la courbe donnée avec ses courbes polaires et avec sa courbe Hessienne, soit du principe de correspondance. Pour déterminer, par cette déduction, l'influence de singularités supérieures on a besoin de connaître les ordres des divergences infiniment petites des branches totales et partielles entre elles. Aussi l'abaissement de la classe, ou de l'ordre, dû à un point singulier, ou à une tangente singulière, dépend-il nécessairement de ces ordres d'infiniment petites; mais indépendamment de ceux-ci il existe une relation entre les deux abaissements, ce qui se montrera par la circonstance qu'il suffit d'appliquer les procédés dont nous venons de parler à la déduction d'une *seule* des formules PLÜCKÉRIENNES — par exemple de celle qui indique la classe d'une courbe d'ordre

⁽¹⁾ Points singuliers des courbes algébriques planes. (Mémoires prés. par divers Savants XXVI, 2). Le théorème ressort de la combinaison de l'Art. I Théor. II Cor., et de l'Art. IV Théor. V.

⁽²⁾ Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI p. 167.

donné — pendant que les autres peuvent être démontrées par une application de la formule (6) ou du théorème sur le genre. L'influence des singularités supérieures sur ces dernières formules se présentera alors d'elle-même, sans aucune étude particulière des ordres d'infiniment petits.

Premièrement on a, en faisant usage de l'expression du genre et de l'identité des genres de la courbe donnée et de sa polaire réciproque, les équations déjà mentionnées

$$(10) \quad 2(p-1) = n' + \sum (\sigma-1) - 2n = n + \sum (\sigma'-1) - 2n',$$

les notations étant les mêmes que dans le n° 5, et les sommations étant étendues à tous les termes différents de zéro, et, évidemment, à autant de termes égaux à zéro qu'on veut. Il est donc permis d'étendre toutes les deux sommations aux mêmes points de la courbe. On déduit ainsi de (10)

$$(11) \quad 3(n'-n) = \sum (\sigma' - \sigma),$$

où la sommation s'étend encore à tous les termes différents de zéro.

On obtient une autre formule par l'application à une seule courbe d'une correspondance, semblable à celle du n° 6. On fait correspondre à chaque point x de la courbe les $n-2$ points y où la tangente en x rencontre encore la courbe. Pour appliquer la formule (6) à cette correspondance il faut substituer

$$\mu_1 = n' - 2, \quad \mu_2 = n - 2,$$

et il sera le plus commode de substituer à $2(p_1-1)$ la seconde, et à $2(p_2-1)$ la première des expressions (10). On trouve alors

$$(12) \quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = \sum (\nu_2 - \nu_1) - (n' - 2) \sum (\sigma - 1) + (n - 2) \sum (\sigma' - 1),$$

où toutes les sommes sont étendues à tous les termes différents de zéro.

En abordant la détermination de $\sum (\nu_2 - \nu_1)$, on rencontre premièrement les mêmes quatre correspondances de points de branches complètes distinctes que dans le cas où x et y appartiennent à des courbes différentes, et chacune de ces correspondances sera représentée, dans tout le second membre de l'équation (12), par exactement les mêmes termes que

dans le second membre de l'équation (8). En observant encore que chaque combinaison de deux branches qui ont un point commun ou une tangente commune se présente ici deux fois, parce que l'une ou l'autre des deux branches peut contenir le point x de la correspondance, on voit que la somme de ces termes sera égale à $2(S'(\sigma'_1\sigma'_2) - S(\sigma_1\sigma_2))$, où les sommes S et S' s'étendent à toutes les combinaisons de l'une ou l'autre de ces deux espèces.

A côté de ces correspondances de points x et y de branches différentes entre elles on a à considérer, dans le cas actuel, celles où les points correspondants x et y coïncident entre elles sur une seule branche. Alors on a

$$\nu_1 = \nu_2 = \sigma + \sigma' - 2.$$

$\nu_2 - \nu_1$ devient donc égal à zéro, de façon que ces correspondances ne seront représentées, dans le second membre de (12), que par les termes contenus dans

$$-(n' - 2) \sum (\sigma - 1) + (n - 2) \sum (\sigma' - 1),$$

qui ont la valeur de

$$-(\sigma + \sigma' - 2)(\sigma - 1) + (\sigma + \sigma' - 2)(\sigma' - 1) = (\sigma + \sigma' - 2)(\sigma' - \sigma).$$

La formule (12) se réduit donc à

$$(13) \quad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum (\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma),$$

où la dernière sommation s'étend à tous les points de la courbe qui donnent des termes différents de zéro.

8. Il est possible de déduire des équations (11) et (13) une nouvelle relation qui ne dépend plus des multiplicités des différentes branches, mais, de même que la formule (9), seulement des multiplicités totales des points et tangentes singuliers. En ajoutant, à cet effet, l'équation (11) à l'équation (13), où il est permis d'étendre la sommation \sum aux mêmes termes, on trouve

$$(14) \quad n'^2 - 3n' - n^2 + 3n = 2S'(\sigma'_1\sigma'_2) - 2S(\sigma_1\sigma_2) + \sum (\sigma'^2 - \sigma' - \sigma^2 + \sigma).$$

Réunissons ici les termes du second membre qui sont formés des degrés de multiplicité σ des branches d'un seul point α -tuple. On trouve

$$-\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \dots - \sigma_r^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - \dots - 2\sigma_{r-1}\sigma_r + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_r = -\alpha^2 + \alpha.$$

En faisant de même pour tous les points où passe une ou plusieurs branches représentées dans le second membre de (14), et en réunissant d'une manière semblable les termes appartenant aux différents contacts de toute tangente singulière, on trouve

$$(15) \quad n'^2 - 3n' - n^2 + 3n = \sum (\alpha'^2 - \alpha') - \sum (\alpha^2 - \alpha),$$

où α et α' sont les degrés de multiplicité totale de tous les points singuliers et tangentes singulières.⁽¹⁾

Si la courbe n'a que des singularités ordinaires, les formules trouvées (10), (11), (13) et (15), dont trois sont indépendantes entre elles, se réduisent à un système de deux relations PLÜCKÉRIENNES augmenté d'une formule servant à exprimer le genre p par les nombres PLÜCKÉRIENS. On a en effet, dans ce cas, en désignant par d et e les nombres des points doubles et cuspidaux, et par d' et e' les nombres des tangentes doubles et tangentes d'inflexion:

$$\begin{aligned} \sum (\sigma - 1) &= e, & \sum (\sigma' - 1) &= e', & \sum (\sigma' - \sigma) &= e' - e \\ S'(\sigma'_1\sigma'_2) &= d', & S(\sigma_1\sigma_2) &= d, & \sum (\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma) &= e' - e \\ \sum (\alpha'^2 - \alpha') &= 2d' + 2e', & \sum (\alpha^2 - \alpha) &= 2d + 2e. \end{aligned}$$

On sait qu'il est possible d'appliquer les formules PLÜCKÉRIENNES aussi aux cas, où la courbe a des singularités supérieures, en représentant chacune de celles-ci par les équivalents PLÜCKÉRIENS introduits par M. CAYLEY,⁽²⁾ que nous désignerons par δ , ε , δ' , ε' . Les conditions imposées à ces équivalents par les formules qui nous occupent — auxquelles il

(¹) La substitution de l'équation (14) à (13) permettait d'éviter d'introduire un nombre infini de termes par la séparation des termes qui contiennent σ de ceux qui contiennent σ' . — Notre formule (15) se distingue d'une formule tout-à-fait semblable de M. NÖTHER par les significations des lettres: ses k ne désignent pas comme nos α les *multiplicités immédiates* des points singuliers, mais celles des points multiples qui en résultent par une décomposition; et la même différence a lieu entre les significations de ses $k^{(1)}$ et de nos α' .

(²) On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quarterly Journal of Mathematics, vol. VII.

faut ajouter celle que leur impose la première formule PLÜCKÉRIENNE — se présentent d'elles-mêmes. Les formules (10) donnent pour représenter une singularité supérieure⁽¹⁾

$$(16) \quad \varepsilon = \sum (\sigma - 1), \quad \varepsilon' = \sum (\sigma' - 1),$$

et la différence $\delta' - \delta$ peut être déterminée par l'une ou l'autre des équations

$$(17) \quad 2(\delta' - \delta) + (\varepsilon' - \varepsilon) = 2S''(\sigma'_1 \sigma'_2) - 2S(\sigma_1 \sigma_2) + \sum (\sigma'^2 - 2\sigma' - \sigma^2 + 2\sigma)$$

ou

$$(18) \quad 2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = \sum (a'^2 - a') - \sum (a^2 - a),$$

qu'on obtient de (13) et (15), les sommes étant étendues à toutes les branches et combinaisons appartenant à la singularité.

Cherchons par exemple la représentation de la singularité formée par r branches complètes tangentes entre elles.

Ayant alors

$$a = \sum (\sigma), \quad a' = \sum' (\sigma'),$$

on trouve (16) et (18)

$$\varepsilon = a - r, \quad \varepsilon' = a' - r$$

$$2(\delta' + \varepsilon' - \delta - \varepsilon) = (a' - a)(a' + a - 1),$$

d'où

$$(19) \quad 2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon + 2r - 3).$$

Dans le cas où $r = 1$, c'est à dire pour une seule branche complète, on trouve

$$(20) \quad 2(\delta' - \delta) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon - 1).$$

Cette relation est due à M. SMITH;⁽²⁾ il n'est pas difficile d'en revenir à l'équation (19), si l'on applique en même temps l'équation (9) aux combinaisons des branches.

⁽¹⁾ Il peut être commode de se servir des équivalents, remplaçant les singularités seulement dans les équations PLÜCKÉRIENNES propres, et non pas dans celle qui exprime le genre. Alors il faut remplacer (16) par

$$\varepsilon' - \varepsilon = \sum (\sigma' - \sigma).$$

⁽²⁾ Proceedings of the London Mathematical Society VI p. 166.

SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

E. GOURSAT

à TOULOUSE.

Le théorème sur les intégrales définies affectées de coupures que vous avez démontré dans votre lettre à M. Mittag-Leffler, publiée par le journal de Borchardt, et dans votre cours à la Sorbonne, peut se démontrer facilement par la considération des intégrales curvilignes et l'application du théorème de CAUCHY. Voici en quelques mots la démonstration.

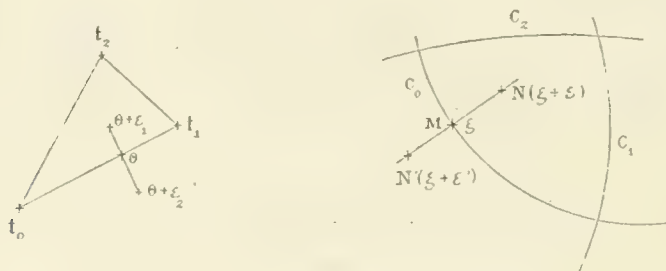
Soient $F(t, z)$, $G(t, z)$ deux fonctions holomorphes des deux variables indéfinies t et z , et t_0 , t_1 deux valeurs quelconques, réelles ou imaginaires.

Considérons l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt$, prise suivant le chemin rectiligne qui joint le point t_0 au point t_1 . Cette intégrale a une valeur unique et finie pour tous les points du plan, que je désignerai par $\Phi(z)$, à l'exception de ceux qu'on détermine par la condition $G(t, z) = 0$, en donnant à t les valeurs comprises dans la formule

$$t_0 + \lambda(t_1 - t_0)$$

où λ prend toutes les valeurs réelles de 0 à 1. On détermine ainsi un nombre fini ou infini de portions de courbes ou de courbes complètes pour lesquelles la fonction $\Phi(z)$ cesse d'avoir un sens.

Soit C_0 l'une de ces courbes, et un point M sur cette courbe d'affixe ζ , auquel correspond sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$ un point θ . Sur la normale en M à la courbe C_0 et de part et d'autre de ce point prenons deux points N et N' , à des distances infiniment petites de ce point; nous désignerons les affixes par $\zeta + \varepsilon$, et $\zeta + \varepsilon'$. L'équation $G(t, z) = 0$ fait correspondre aux valeurs $\zeta + \varepsilon$, $\zeta + \varepsilon'$ deux valeurs $\theta + \varepsilon_1$, $\theta + \varepsilon_2$, voisines de θ et figurées par des points situés de part



et d'autre du chemin rectiligne $t_0 t_1$. Supposons, par exemple, qu'à la valeur $\zeta + \varepsilon$ corresponde pour t la valeur $\theta + \varepsilon_1$, et admettons en outre qu'à la valeur ζ l'équation $G(t, z) = 0$ ne fasse correspondre qu'une valeur θ sur le chemin rectiligne $t_0 t_1$. On pourra alors trouver un point t_2 tel qu'à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$ l'équation $G(t, \zeta + \varepsilon) = 0$ n'ait d'autre racine que la racine $\theta + \varepsilon_1$. La fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ n'aura alors à l'intérieur de ce triangle qu'un seul point critique, le point $\theta + \varepsilon_1$, et l'application du théorème de CAUCHY nous donne immédiatement

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt = 2i\pi \cdot 1$$

A désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$ relative au pôle $\theta + \varepsilon_1$:

$$A = R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon).$$

Chacune des intégrales $\int_{t_1}^{t_2}$, $\int_{t_2}^{t_0}$ est supposée prise comme la première suivant le chemin rectiligne. A chacune de ces intégrales est affecté un système de coupure différent, et différent du premier. Posons

$$\phi_1(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

$$\phi_2(z) = \int_{t_2}^{t_0} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt;$$

l'égalité précédente pourra s'écrire

$$(1) \quad \phi(\zeta + \varepsilon) + \phi_1(\zeta + \varepsilon) + \phi_2(\zeta + \varepsilon) = 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon)$$

Donnons maintenant à z la valeur $\zeta + \varepsilon'$; la fonction sous le signe d'intégration sera holomorphe à l'intérieur du triangle $t_0 t_1 t_2$, et le théorème de CAUCHY nous donnera

$$(2) \quad \phi(\zeta + \varepsilon') + \phi_1(\zeta + \varepsilon') + \phi_2(\zeta + \varepsilon') = 0.$$

Retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta + \varepsilon) - \phi(\zeta + \varepsilon') &= [\phi_1(\zeta + \varepsilon') - \phi_1(\zeta + \varepsilon)] + [\phi_2(\zeta + \varepsilon') - \phi_2(\zeta + \varepsilon)] \\ &\quad + 2i\pi R(\theta + \varepsilon_1, \zeta + \varepsilon) \end{aligned}$$

Si maintenant on fait tendre ε et ε' vers zéro, chacune des fonctions $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ étant holomorphe pour $z = \zeta$, les deux différences contenues dans le second membre tendent vers zéro et il vient pour la différence cherchée

$$\phi(N) - \phi(N') = 2i\pi R(\theta, \zeta),$$

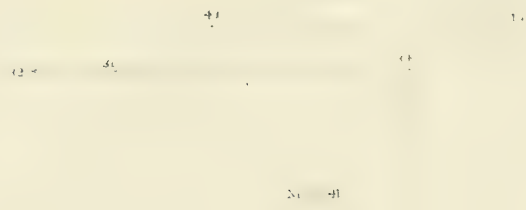
$R(\theta, \zeta)$ désignant le résidu de la fonction $\frac{F(t, \zeta)}{F(t, \zeta)}$ relatif au pôle $t = \theta$.

On voit aussi de quelle manière doivent être supposés pris les points N et N' , sans qu'il soit besoin d'insister là-dessus; le point $N(\zeta + \varepsilon)$ doit être tel qu'un observateur parcourant le chemin rectiligne $t_0 t_1$ laisse à sa gauche le point $\theta + \varepsilon_1$ correspondant.

La démonstration précédente n'a pas l'avantage, comme celle que vous avez donnée, de n'exiger que des considérations élémentaires sur les intégrales définies. Cependant, en raison même de sa généralité et de ses rapports avec le théorème de CAUCHY, il m'a semblé qu'elle n'était pas dépourvue d'intérêt.

10

Fig 1



12

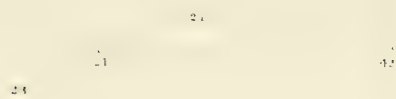
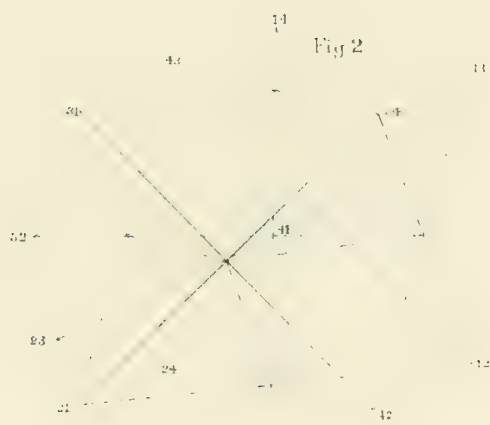


Fig 2



10 11 12 13 14 15

16



10 11 12 13 14 15

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES

PAR

H. POINCARÉ.

§ 1. *Séries Thétafuchsiennes.*

Dans un mémoire antérieur, j'ai montré comment il est possible de former des groupes discontinus avec des substitutions de la forme:

$$(1) \quad \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

en choisissant les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ de telle façon que les diverses substitutions du groupe n'altèrent pas un certain cercle appelé cercle fondamental. Je supposerai dans tout ce qui va suivre que ce cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, de telle sorte que son équation soit:

$$\text{mod. } z = 1.$$

Je considère un de ces groupes discontinus, dits *groupes fuchsiens*, que j'appelle G . A ce groupe correspondra une décomposition du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux R , tous congruents entre eux.

Je me propose de démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions uniformes de z qui demeurent inaltérées par les diverses substitutions du groupe G et que j'appellerai fonctions fuchsiennes.

A cet effet j'envisage les diverses substitutions de G comprises dans la formule (1) et je pose pour abrégé:

$$\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z)$$

comme je l'ai fait au § 3 du mémoire cité. Je forme ensuite la série:

$$(2) \quad \sum_i^{\infty} \text{mod.} \left(\frac{df_i(z)}{dz} \right)^m$$

où m est un entier positif plus grand que 1.

Je vais démontrer que cette série est convergente en faisant successivement diverses hypothèses:

1° Supposons d'abord que z soit intérieur au cercle fondamental: il sera alors intérieur à l'un des polygones R , par exemple au polygone R_h qui correspond à la substitution de G qui a pour indice h et qui s'écrit:

$$(z, f_h(z))$$

Soit:

$$f_k(z) = f_i[f_h(z)]$$

La substitution

$$(z, f_k(z))$$

fera partie du groupe G et correspondra à un certain polygone R_k . Puisque z est supposé intérieur à R_h , $f_i(z)$ sera intérieur à R_k .

Supposons que l'on décrive autour de z un contour très petit C_0 , enveloppant le point z et étant situé tout entier à l'intérieur de R_h ; le transformé de C_0 par la substitution $[z, f_i(z)]$ sera un certain contour très petit C_i , enveloppant le point $f_i(z)$ et situé tout entier à l'intérieur de R_k .

Afin d'établir la convergence de la série (2) nous allons démontrer successivement un certain nombre de lemmes.

LEMME I. *La somme des surfaces de tous les contours C_i est égale à une quantité finie C .*

En effet ces différents contours C_i en nombre infini sont tous intérieurs au cercle fondamental; de plus ils n'ont aucune partie commune puisque chacun d'eux est tout entier intérieur à l'un des polygones R . La somme de leurs surfaces est donc plus petite que la surface du cercle fondamental. Elle est donc finie.

C. Q. F. D.

LEMME II. *Le rapport de la plus grande à la plus petite valeur que puisse prendre le module de $\frac{df_i}{dz}$ quand z reste intérieur à C_0 est plus petit qu'une certaine quantité K indépendante de i .*

En effet on a :

$$\frac{df_i}{dz} = \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

Le module de $\frac{df_i}{dz}$ est donc égal à $\frac{1}{\text{mod. } \gamma_i^2}$ divisé par le carré de la distance du point z au point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les divers transformés du point ∞ ; ils sont donc tous extérieurs au cercle fondamental comme le point ∞ lui-même et ils ne peuvent être infiniment voisins les uns des autres que dans le voisinage de ce cercle. Soient M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre ce module quand z reste intérieur à C_0 ; soient a et b la plus grande et la plus petite distance du point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ au contour C_0 ; nous aurons évidemment :

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a^2}{b^2}$$

Or tous les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont extérieurs au cercle fondamental. Soient donc A et B la plus grande et la plus petite distance de l'origine, centre du cercle fondamental, au contour C_0 . Ces deux distances seront plus petites que 1 puisque C_0 est tout entier intérieur au cercle fondamental. On a alors :

$$a < 1 + A \qquad b > 1 - B$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i} < \left(\frac{1 + A}{1 - B} \right)^2$$

D'ailleurs $\left(\frac{1 + A}{1 - B} \right)^2 = K$ est indépendant de i .

C. Q. F. D.

LEMME III. *On a quel que soit i*

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}$$

En effet soit $z = x + iy$; la surface du contour C_0 s'écrit alors

$$C_0 = \iint dx \, dy$$

et la surface du contour C_i

$$C_i = \iint \left[\text{mod.} \frac{df_i}{dz} \right]^2 dx \, dy$$

les deux intégrales doubles étant prises à l'intérieur du contour C_0 . On a donc

$$C_i > \iint m_i^2 dx \, dy > m_i^2 C_0$$

ou bien

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0$$

ou enfin:

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

C. Q. F. D.

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir la convergence de la série (2). Supposons en effet d'abord $m = 2$; nous aurons à envisager la série:

$$(2) \quad \sum \text{mod.} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^2 = \sum \text{mod.} (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

Or nous aurons:

$$\text{mod.} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^2 < M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Les termes de la série (2) sont donc plus petits respectivement que $\frac{K^2}{C_0}$ multiplié par le terme correspondant de la série $\sum C_i$ dont la somme est un nombre fini C d'après le lemme I.

La série (2) aura donc aussi une somme finie S . On a par conséquent a fortiori quel que soit i

$$\text{mod.} \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}$$

On aura donc pourvu que $m > 2$

$$\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m < \left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}$$

C'est à dire que chaque terme de la série $\sum \left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m$ est plus petit que la constante $S^{\frac{m-2}{2}}$ multipliée par le terme correspondant de la série $\sum \left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^2$ qui est convergente.

La convergence de la série (2) est donc démontrée et il s'agit ici, non d'une semi-convergence, mais d'une convergence absolue puisque tous les termes de la série sont positifs.

2° Supposons maintenant que le point z soit extérieur au cercle fondamental.

Si le point z est l'un des points $\frac{-\partial_i}{\gamma_i}$, l'un des termes de la série est infini et la convergence est impossible. Supposons donc que le point z ne se confonde avec aucun des points $\frac{-\partial_i}{\gamma_i}$, je dis que la série (2) sera encore convergente.

Considérons en effet un autre point z_1 intérieur au cercle fondamental. La série

$$(2^a) \quad \sum \text{mod. } \left(\frac{df_i(z_1)}{dz_1}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z_1 + \partial_i)^{-2m}$$

est convergente d'après ce qu'on vient de voir. Je dis qu'il en est de même de la série

$$(2) \quad \sum \text{mod. } \left(\frac{df_i}{dz}\right)^m = \sum \text{mod. } (\gamma_i z + \partial_i)^{-2m}$$

En effet nous pouvons trouver une limite supérieure R de $\text{mod. } \left(z_1 + \frac{\partial_i}{\gamma_i}\right)$ et une limite inférieure r de $\text{mod. } \left(z + \frac{\partial_i}{\gamma_i}\right)$; car les points $\frac{-\partial_i}{\gamma_i}$ ont un module fini et limité et ils ne sont pas infiniment rapprochés du point z .

On a donc:

$$\frac{\text{mod. } (\gamma_i z + \partial_i)^{-2m}}{\text{mod. } (\gamma_i z_1 + \partial_i)^{-2m}} < \frac{R^{2m}}{r^{2m}}.$$

Chaque terme de la série (2) est donc plus petit que $\left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$ multiplié par le terme correspondant de la série (2^a) qui est convergente.

La série (2) est donc aussi convergente.

3° Supposons maintenant que le point z soit sur la circonférence du cercle fondamental. La démonstration précédente sera encore applicable pourvu que le point z ne soit pas infiniment rapproché d'une infinité de points $\frac{-\partial_i}{\tilde{r}_i}$. C'est ce qui arrivera si le point z appartient à l'un des

côtés de la 2^{me} sorte de l'un des polygones R . La série (2) est alors convergente. Dans le cas contraire, les termes de la série (2) sont susceptibles de croître indéfiniment, de sorte que la convergence n'a pas lieu.

Les points de la circonférence du cercle fondamental se divisent en deux classes, les uns appartiennent à l'un des côtés de la 2^{me} sorte de l'un des polygones R ; les autres, qui ne satisfont pas à cette condition, s'appelleront les *points singuliers essentiels du groupe G* , de sorte que la condition de convergence de la série (2) pourra s'énoncer ainsi: *le point z devra ne se confondre ni avec aucun des points $\frac{-\partial_i}{\tilde{r}_i}$, ni avec aucun des points singuliers essentiels du groupe G .*

La série (2) définit une fonction de z , mais cette fonction n'est pas monogène, comme on le voit aisément d'après la forme même de la série. La somme de la série (2) dépend également du groupe G et si on suppose que les coefficients des substitutions fondamentales de ce groupe sont des fonctions d'un certain paramètre t , la somme de la série (2) sera aussi une fonction de t .

Une petite digression est nécessaire pour me permettre d'exprimer plus nettement ma pensée. Reportons-nous au § 11 du mémoire sur les groupes fuchsien, paragraphe intitulé: Formation effective des groupes fuchsien, et prenons pour fixer les idées l'exemple I de ce paragraphe. Dans cet exemple, il s'agissait de former les groupes fuchsien de la 3^{me} famille, engendrés par un polygone normal de $2n$ côtés de la 2^{me} sorte. Nous avons vu que les coefficients des n substitutions fondamentales de ce groupe ne sont assujettis qu'à des inégalités. Il est donc possible de les exprimer en fonctions rationnelles de $3n$ paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \dots, u_{3n}$$

assujettis seulement à être réels et à satisfaire à certaines inégalités. Les coefficients de toutes les substitutions du groupe sont alors, comme ceux des substitutions fondamentales, des fonctions rationnelles des paramètres u . De plus il est évident que tous les groupes différents que l'on obtient en attribuant aux u différents systèmes de valeurs, sont tous isomorphes entre eux.

Ce qui précède peut être étendu au cas le plus général et, pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, je vais introduire une définition nouvelle qui nous sera utile dans la suite. Considérons deux polygones normaux R_0 et R'_0 ; je suppose qu'ils soient désignés de même dans le système de notation du § 7 du mémoire cité. Les cycles de chaque catégorie seront en même nombre dans R_0 et R'_0 et ils se correspondront un à un. Je suppose de plus que la somme des angles de R_0 qui appartiennent à un même cycle de la 1^{ère} catégorie, est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0 . Je dirai alors que les deux polygones, ainsi que les deux groupes qu'ils engendrent, font partie de la même *classe*. Il est clair que dans ce cas les deux groupes sont isomorphes entre eux.

Considérons donc une infinité de groupes appartenant à la même classe C et dérivés de n substitutions fondamentales. Prenons n substitutions quelconques et cherchons si elles peuvent être prises pour les substitutions fondamentales d'un groupe discontinu appartenant à la classe C . Nous trouverons en général que leurs coefficients doivent satisfaire à certaines égalités et à certaines inégalités. Ces coefficients pourront alors s'exprimer rationnellement en fonctions de p paramètres arbitraires

$$u_1, u_2, \dots u_p$$

assujettis seulement à rester réels et à satisfaire à certaines inégalités. La seule différence avec l'exemple I du § 11 c'est que l'on a en général

$$p < 3n,$$

au lieu de $p = 3n$.

Deux groupes qui sont de la même classe sont en général de la même famille. Il y a cependant des exceptions. Ainsi reprenons l'exemple I du § 11 que j'ai cité plus haut. Les groupes envisagés sont en général de la 3^{me} famille; mais dans certains cas limités, ils peuvent se réduire à des

groupes de la 2^{me} ou de la 4^{me} familles. En général un groupe de la 2^{me} famille ou de la 4^{me} famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la 3^{me} famille qui ne se réduisent à la 2^{me} et à la 4^{me} familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres u . De même un groupe de la 6^{me} ou de la 7^{me} familles peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la 5^{me} famille, qui ne se réduisent à la 6^{me} ou à la 7^{me} familles que pour certaines valeurs particulières des paramètres u . Cette remarque nous sera utile dans la suite.

Ainsi il existe des classes de groupes fuchsien qui sont tous isomorphes entre eux; les coefficients de leurs substitutions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres réels u , assujettis à certaines inégalités. Si l'on forme la série (2) à l'aide des différents groupes appartenant à une même classe, la somme de cette série sera évidemment une fonction des u ; je dis que ce sera une fonction *continue* de ces paramètres.

Il est clair que chaque terme de la série, étant rationnel par rapport aux u , sera une fonction continue de ces paramètres; mais cela ne suffit pas pour qu'il en soit de même de la somme de cette série. Si nous considérons en effet une série

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x) + \dots$$

dont les termes sont des fonctions continues de x et qui est convergente, la somme $S(x)$ de cette série peut être une fonction discontinue de x . Mais faisons une hypothèse de plus. Supposons que quand on a :

$$(3) \quad x_1 \geq x \geq x_0$$

on ait :

$$\text{mod. } F_n(x) < C_n$$

et que la série

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots$$

soit convergente; on sait que $S(x)$ restera fonction continue de x tant que cette variable satisfera aux inégalités (3). Ce résultat est d'ailleurs facile à étendre au cas de plusieurs variables. Ainsi pour démontrer que la série (2) est une fonction continue des u , il suffit de faire voir que l'on

peut trouver une infinité de nombres positifs A_i (indépendants des u), tels que la série $\sum A_i$ soit convergente et que l'inégalité

$$\left(\text{mod. } \frac{df_i}{dz}\right)^m < A_i$$

soit satisfaite quels que soient les u , pourvu que ces paramètres restent compris entre certaines limites qui peuvent d'ailleurs être aussi voisines que l'on veut du système de valeurs pour lequel on veut démontrer la continuité de la somme de la série (2).

Pour démontrer cette continuité, je vais faire usage de certaines considérations qui me fourniront en même temps une démonstration nouvelle de la convergence de cette série, ce qui ne sera pas inutile, vu l'importance de ce résultat. Je vais rappeler quelques-unes des définitions du § 2 du Mémoire sur les groupes fuchsien. Dans ce paragraphe j'avais appelé figures congruentes deux figures qui sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients réels. Posant ensuite

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

j'avais appelé L d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod. } dz}{y}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire plane l'intégrale

$$\iint \frac{dx dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire.

La L d'un arc et la S d'une aire sont des invariants pour ces figures, c'est à dire que deux arcs congruents ont même L et que deux aires congruents ont même S .

Plus tard au § 12 du mémoire cité, j'ai envisagé des groupes de substitutions qui n'étaient plus assujetties à être réelles, mais à conserver un certain *cercle fondamental*. Par une extension toute naturelle, deux figures seront dites congruentes lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental. Il

y aura pour les arcs et les aires deux invariants analogues à ceux que nous avons rencontrés dans le cas des substitutions réelles et que nous appellerons par extension L et S . Par exemple dans le cas qui nous occupe, le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Posons

$$z = \rho e^{i\omega}$$

J'appellerai L d'un arc, l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod. } dz}{1 - \rho^2}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire l'intégrale

$$\iint \frac{\rho d\rho d\omega}{(1 - \rho^2)^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire. On vérifie aisément que deux arcs congruents ont même L , pendant que deux aires congruentes ont même S .

Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ . La S sera:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\rho \frac{\rho d\rho}{(1 - \rho^2)^2} = \frac{\pi \rho^2}{1 - \rho^2}$$

La L de son rayon sera:

$$R = \int_0^\rho \frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{1}{2} L \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Nous appellerons cette quantité le R du cercle.

On a, en fonction de R :

$$\rho = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}$$

$$S = \frac{\pi}{4} (e^{2R} + e^{-2R} - 2)$$

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de la série (2), et supposons pour fixer les idées que le point z est intérieur au cercle fondamental; la démonstration s'étendrait sans peine au cas général.

Nous décrirons autour de z un contour C_0 que nous pourrons prendre assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de l'un des polygones R , de R_h par exemple. Quand les paramètres u varieront entre les limites que nous leur avons fixées, les polygones R varieront, mais nous pourrons toujours supposer que C_0 est assez petit pour rester constamment tout entier à l'intérieur de R_h . Si nous considérons maintenant les différents transformés du point z , c'est à dire les différents points $\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, chacun de ces points sera contenu à l'intérieur d'un petit contour C_i situé tout entier à l'intérieur d'un certain polygone R_k ainsi qu'on l'a vu plus haut. Tous les contours C_i seront *congruents entre eux et extérieurs les uns aux autres*.

J'appellerai σ la S de C_0 qui sera celle de tous les C_i . Si je considère maintenant diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par C_0 , la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle λ .

Démontrons maintenant quelques lemmes.

LEMME IV. *Considérons les points transformés de z , c'est à dire les points*

$$\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

qui sont intérieurs à un cercle C' qui a pour centre l'origine et pour rayon

$$\rho' = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

le nombre de ces points est plus petit que :

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

En effet soit N ce nombre.

Si un point $\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ est intérieur au cercle C' , le contour C_i correspondant sera évidemment tout entier à l'intérieur du cercle C'' qui a pour centre l'origine et dont le R surpasse de λ celui du cercle C' , c'est à dire dont le R est égal à $R' + \lambda$.

Il y a donc à l'intérieur du cercle C'' au moins N contours C_i dont la S totale est égale à $N\sigma$.

Or la S du cercle C'' est

$$\frac{\pi}{4}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

On a donc:

$$N < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R'+\lambda)} + e^{-2(R'+\lambda)} - 2)$$

C. Q. F. D.

LEMME V. *On a identiquement:*

$$\text{mod. } \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 \text{ mod. } \left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \text{mod. } z^2}$$

En effet envisageons un contour infiniment petit C_0 décrit autour du point z et le transformé C_i de ce contour par la substitution

$$\left(z, \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

Soient ω_0 et ω_i leurs surfaces, on aura:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \text{mod. } \left[\frac{d \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}}{dz} \right]^2 = \text{mod. } \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^4}$$

Les S de ω_0 et de ω_i seront:

$$\iint \frac{dx dy}{(1 - \text{mod. } z^2)^2} = \frac{\omega_0}{(1 - \text{mod. } z^2)^2}$$

$$\iint \frac{dx dy}{1 - \text{mod. } \left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2} = \frac{\omega_i}{\left[1 - \text{mod. } \left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2 \right]^2}$$

Or ces figures sont congruentes et ont même S .

On a donc

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \left[\frac{1 - \text{mod. } \left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \text{mod. } z^2} \right]^2$$

d'où:

$$\text{mod. } \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{1 - \text{mod. } \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^2}{1 - \text{mod. } z^2}$$

C. Q. F. D.

Considérons deux cercles ayant pour centre l'origine et passant, l'un par le point z et l'autre par le point $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$.

Soit A le R du premier cercle et R' le R du second cercle. On aura:

$$\text{mod. } z = \frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1} \quad \text{mod. } \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = \frac{e^{2R'} - 1}{e^{2R'} + 1}$$

et enfin

$$\text{mod. } \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} = \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R'} + e^{-2R'} + 2}$$

THÉORÈME. *La série (2) est convergente.*

Décrivons en effet une infinité de cercles ayant pour centre commun l'origine et dont les R croissent en progression arithmétique. Soient $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ ces cercles, et soit nr le R du cercle K_n .

Ecrivons la série (2) sous la forme suivante:

$$(2 \text{ bis}) \quad \Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$$

On obtient le terme U_n de la série (2 bis) en groupant tous les termes de la série (2) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ compris dans la couronne circulaire située entre les deux cercles K_{n-1} et K_n .

Comme les termes de la série (2) sont positifs, un pareil groupement est licite et la convergence de la série (2 bis) entraîne celle de la série (2).

Le nombre des termes de (2) groupés ensemble dans le terme U_n est, en vertu du Lemme IV, plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(nr+\lambda)} + e^{-2(nr+\lambda)} - 2) < \frac{\pi}{4\sigma}e^{2(nr+\lambda)}$$

Chacun d'eux est, en vertu du Lemme V plus petit que

$$\left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)} + e^{-2(nr-r)} + 2} \right)^m < \left(\frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2(nr-r)}} \right)^m$$

On a donc

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr} e^{-n(m-1)r}$$

Posons:

$$\frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr} = K$$

on aura:

$$(3) \quad U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)r}}$$

K sera une constante indépendante de n et le second membre de l'inégalité (3) sera, puisque $m > 1$, le n^{me} terme d'une progression géométrique décroissante. La série (2 bis), et par conséquent la série (2), est donc convergente.

C. Q. F. D.

Voyons quelle erreur on commet quand on se restreint dans la série (2) aux termes qui correspondent aux points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre l'origine et dont le R est $(n-1)r$. La somme des termes négligés est égale à

$$U_n + U_{n-1} + \dots$$

et par conséquent plus petite que

$$\frac{K e^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

THÉORÈME. *La somme Σ de la série (2) est une fonction continue des paramètres u .*

En effet soit Σ la valeur de cette somme pour certaines valeurs

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

de ces paramètres u .

Soit $\Sigma + \Delta \Sigma$ la valeur de cette même somme pour des valeurs voisines

$$u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_p + \Delta u_p$$

de ces mêmes paramètres. Je dis qu'on peut prendre les Δu assez petits pour que:

$$\Delta \Sigma < \varepsilon$$

ε étant une quantité donnée.

Soit Σ_0 la somme des $n - 1$ premiers termes de la série (2 bis)

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$$

Soit

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \dots$$

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Soit de même $\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0$, $\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1$, la somme des termes correspondants de la série $\Sigma + \Delta \Sigma$; de telle sorte que

$$\Sigma + \Delta \Sigma = (\Sigma_0 + \Delta \Sigma_0) + (\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1)$$

On aura:

$$\Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}} \quad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{Ke^{n(1-m)r}}{1 - e^{(m-1)r}}$$

Nous pourrions donc prendre n assez grand pour que:

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Sigma_1 + \Delta \Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Or, une fois n choisi, Σ_0 sera fonction continue des u ; on pourra donc prendre les Δu assez petits pour que

$$\Delta \Sigma_0 < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par conséquent pour que

$$\Delta \Sigma < \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant la série suivante

$$(4) \quad \theta(z) = \sum H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Je suppose:

1° que l'algorithme $H(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais qui est d'ailleurs quelconque.

2° que le nombre m est un entier plus grand que 1. La fonction $H(z)$ aura un certain nombre d'infinis

$$a_1, a_2, \dots, a_I.$$

Si le point z se confond avec un des points

$$\frac{\alpha_i \alpha_k + \beta_i}{\gamma_i \alpha_i + \delta_i}$$

l'un des termes de la série est infini et par conséquent la série ne peut être convergente.

Supposons au contraire que cela n'ait pas lieu. Nous pourrions trouver un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit i

$$\text{mod. } H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) < M$$

on pourra même choisir M assez grand pour que cette inégalité subsiste quand on fait varier les paramètres u entre certaines limites.

Je dis maintenant que la série $\theta(z)$ que j'appellerai *série thétafuchsienne* est convergente. En effet nous aurons

$$\text{mod. } \left[H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \right] < M \text{ mod. } (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Le module de chaque terme de la série (4) est donc plus petit que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. C'est à dire que la série (4) est convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

D'ailleurs on démontrerait, comme pour la somme de la série (2) que la somme de la série (4) est une fonction *continue* des paramètres u .

§ 2. Classification et Propriétés Générales.

Ainsi la série (4) est convergente sauf pour certains points singuliers; dans ces conditions elle définit une fonction $\theta(z)$ holomorphe. La fonction $\theta(z)$ est essentiellement uniforme, mais elle cesse d'être holomorphe aux points singuliers pour lesquels la série (4) cesse d'être convergente.

Ces points singuliers sont:

1° Les points

$$\frac{\alpha_i \alpha_k + \beta_i}{\gamma_i \alpha_k + \delta_i}$$

c'est à dire les divers transformés des infinis de $H(z)$. Ces points sont des pôles dans le voisinage desquels $\theta(z)$ est méromorphe.

2° Les points $\frac{\alpha_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les divers transformés du point ∞ .

Ces points sont encore des pôles dans le voisinage desquels $\theta(z)$ est méromorphe.

On démontrerait ce double fait en remarquant que dans le voisinage de ces points un des termes de la série (4) devient infini et que si l'on supprime ce terme, la série reste convergente.

3° Nous avons enfin les points singuliers essentiels du groupe G , c'est à dire les points du cercle fondamental qui n'appartiennent pas à un côté de la 2° sorte de l'un des polygones R . Ce sont aussi pour la fonction $\theta(z)$ des points singuliers essentiels.

Voici maintenant la propriété fondamentale de cette fonction. Considérons une substitution quelconque du groupe G , par exemple:

$$(5) \quad \left(z, \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right)$$

cherchons quelle relation il y a entre

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) \text{ et } \theta(z)$$

Le système des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

formant un groupe dont fait partie la substitution (5) sera identique au système des substitutions:

$$\left[z, \frac{\alpha_i \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) + \beta_i}{\gamma_i \left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) + \delta_i} \right] = (z, f_i[f_k(z)])$$

en posant pour abrégé :

$$\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \qquad \frac{a_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} = f_k(z)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\theta(z) = \sum H[f_i[f_k(z)]] \left[\frac{d[f_i[f_k(z)]]}{dz} \right]^m$$

ou :

$$\theta(z) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k} \right)^m \left(\frac{df_k}{dz} \right)^m$$

On a d'ailleurs :

$$\theta(f_k) = \sum H[f_i(f_k)] \left(\frac{df_i(f_k)}{df_k} \right)^m$$

On a donc :

$$\theta(f_k) = \theta(z) \left(\frac{df_k}{dz} \right)^{-m}$$

ou bien :

$$(6) \qquad \theta \left(\frac{a_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right) = \theta(z) (\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Nous appellerons *fonction thétafuchsienne* toute fonction uniforme de z jouissant de la propriété (6). Nous classerons les fonctions thétafuchiennes de la même façon que les groupes fuchsien, à l'aide des propriétés du polygone normal R_0 correspondant.

On a vu que les polygones R_0 pouvaient se distribuer en 7 familles et que la 1^{ère}, la 2^{me}, la 4^{me}, la 6^{me} et la 7^{me} de ces familles se subdivisent en deux ordres. Mais tout groupe du 2^d ordre de la 2^{me}, de la 4^{me}, de la 6^{me} et de la 7^{me} familles est identique à un groupe de la 3^{me} ou de la 5^{me} familles, on à un groupe du 1^{er} ordre de la 6^{me} ou de la 7^{me} familles. (Voir § 9 et 11 du mémoire sur les groupes fuchsien.) Nous pouvons donc toujours supposer que le groupe G n'appartient pas au 2^d ordre de la 2^{me}, de la 4^{me}, de la 6^{me} ou de la 7^{me} familles.

Cela posé, je dirai que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 1^{ère}, de la 3^{me} et de la 5^{me} familles si le groupe G fait partie de l'une de ces familles et que la fonction $\theta(z)$ fait partie de la 2^{me}, de la 4^{me}, de la

6^{me} ou de la 7^{me} familles si le groupe G appartient au 1^{er} ordre de l'une de ces familles.

De même je dirai qu'une fonction thétafuchsienne est du genre p , si le groupe G correspondant est de ce genre.

Je puis également étendre aux fonctions thétafuchiennes la classification des groupes fuchiens en classes dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent.

Envisageons d'abord les fonctions de la 1^{ère}, de la 2^{me} et de la 5^{me} familles. Les polygones R correspondants n'ont pas de côtés de la 2^{me} sorte, de telle manière que tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels. Le plan se trouve divisé en deux parties, à savoir l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, par une ligne singulière essentielle; il faut en conclure, conformément aux principes actuellement admis dans la théorie des fonctions, et mis en lumière par les travaux de M. WEIERSTRASS, que le développement (4) représente deux fonctions distinctes, selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental. La première de ces fonctions n'existera qu'à l'intérieur de ce cercle et admettra comme espace lacunaire toute la partie du plan qui lui est extérieure; la seconde au contraire n'existera qu'à l'extérieur du cercle fondamental. Dans ce qui va suivre nous n'envisagerons jamais que la première de ces fonctions; en effet la seconde d'entre elles, c'est à dire celle qui n'existe qu'à l'extérieur du cercle fondamental, peut aisément par un changement de z en $\frac{1}{z}$ se ramener à une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Considérons donc une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et définie par une série telle que (4); nous pouvons faire deux hypothèses:

Nous pouvons supposer qu'un ou plusieurs des infinis de $H(z)$ sont intérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\theta(z)$ aura des infinis (sauf dans certains cas exceptionnels où plusieurs infinis de cette fonction se détruisent mutuellement) et nous dirons qu'elle est de la 1^{ère} espèce; nous serons certains alors que la somme de la série (4) n'est pas identiquement nulle puisque cette somme peut croître indéfiniment.

On peut supposer au contraire que tous les infinis de $H(z)$ sont extérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\theta(z)$ n'a pas d'infinis

et nous dirons qu'elle est de la 2^{de} espèce. La fonction $\theta(z)$ peut alors se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et qui reste convergente tant que z reste intérieur au cercle fondamental, c'est à dire tant que la fonction $\theta(z)$ existe.

Rien n'empêche dans ce cas que la somme de la série (4) ne soit identiquement nulle et nous démontrerons en effet plus loin que toutes les fonctions θ de 2^{de} espèce s'expriment linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Passons maintenant aux fonctions de la 3^e, de la 4^e, de la 6^e et de la 7^e familles; les polygones R ont alors des côtés de la 2^{de} sorte, tous les points du cercle fondamental ne sont plus des points singuliers essentiels; nous n'avons plus une ligne singulière essentielle, mais une infinité de points singuliers isolés. Il résulte de là que la série (4) au lieu de représenter deux fonctions distinctes selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental, représente une seule et même transcendante qui est partout holomorphe, sauf en certains points isolés. La fonction $\theta(z)$ est donc une transcendante uniforme existant dans toute l'étendue du plan et présentant une infinité de points singuliers essentiels.

On peut se demander quelle place elle occupe dans la classification que M. MITTAG-LEFFLER a donné de pareilles fonctions dans sa communication du 3 Avril 1882 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Les points singuliers essentiels étant en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 2^{de} espèce; ceux-ci à leur tour s'ils sont en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de 3^{me} espèce, et ainsi de suite.

Je dis que nous ne serons jamais arrêtés et que nous trouverons ainsi une infinité de points singuliers de toutes les espèces. En effet si nous avons une infinité de points singuliers de la $n - 1$ ^e espèce; il y aura au moins un point singulier de la n ^e espèce; mais s'il y en a un, il y en aura une infinité, car tous ses transformés par les diverses substitutions du groupe G devront aussi être des points singuliers de la n ^e espèce.

C. Q. F. D.

Nous avons donc affaire à une de ces fonctions que M. MITTAG-LEFFLER a appelées du 2^e genre.

Il semble d'abord que toutes les fonctions aient des infinis, car elles existent dans tout le plan et elles doivent avoir pour pôles ceux de la fonction rationnelle $H(z)$ qui doit devenir infinie en quelque point du plan. Mais il peut arriver que plusieurs des infinis de la fonction $\theta(z)$ se détruisent mutuellement; de sorte qu'on peut construire comme dans le cas précédent des fonctions thétafuchsiennes de la 2^e espèce; on en verra un exemple au § 8.

Parmi les points singuliers de nos fonctions thétafuchsiennes, il en est qui doivent particulièrement attirer notre attention; ce sont les sommets des polygones R qui sont de la 2^{de} catégorie et qui appartiennent à un cycle de la 3^{me} sous-catégorie. (Voir le § 5 du mémoire sur les groupes fuchsiens).

Soit α un pareil sommet, il y aura parmi les substitutions du groupe G une substitution parabolique de la forme:

$$\left(\frac{1}{z - \alpha}, \frac{1}{z - \alpha} + \beta \right)$$

C'est là la définition même des cycles de la 3^{me} sous-catégorie.

Posons:

$$\frac{2i\pi}{\beta} \frac{1}{z - \alpha} = t \qquad \frac{2i\pi}{\beta} \frac{1}{f_i(z) - \alpha} = \varphi_i(t)$$

en conservant pour le symbole $f_i(z)$ la signification qu'on lui a donnée plus haut, c'est à dire:

$$f_i(z) = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

Définissons maintenant un symbole H_1 de la façon suivante:

$$H_1(t) = H\left(\alpha + \frac{2i\pi}{\beta t}\right) \left[\frac{-2i\pi}{\beta t^2} \right]^m$$

Il est clair que H_1 sera l'algorithme d'une fonction rationnelle. On trouvera alors identiquement:

$$\theta(z) = \sum H[f_i(z)] \left[\frac{df_i(z)}{dz} \right]^m = \sum H_1[\varphi_i(t)] \left(\frac{d\varphi_i(t)}{dt} \right)^m \left(\frac{dt}{dz} \right)^m$$

Mais la série $\theta(z)$ étant absolument convergente on peut en ordonner les termes comme on le veut. Voici comment nous allons les ordonner:

Parmi les fonctions $\varphi_i(t)$ on peut en choisir une infinité

$$\theta_0(t) = t, \theta_1(t), \theta_2(t), \dots$$

de telle façon que toute fonction $\varphi_i(t)$ puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme:

$$\varphi_i(t) = \theta_k(t + 2hi\pi)$$

h étant un entier positif ou négatif; ce qui permet d'écrire:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H_1[\theta_k(t + 2hi\pi)] \left[\frac{d\theta_k(t + 2hi\pi)}{dt}\right]^m$$

Considérons un nouvel algorithme $H'_k(t)$ défini comme il suit:

$$H'_k(t) = H_1[\theta_k(t)] \left(\frac{d\theta_k}{dt}\right)^m$$

d'où:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi)$$

Il faut d'abord effectuer la sommation par rapport à h ; or $H'_k(t)$ est une fonction rationnelle de t qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. On aura donc:

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t + 2hi\pi) = H''_k(e^t)$$

$H''_k(e^t)$ désignant une fonction rationnelle de e^t qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Il vient donc:

$$\theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t)$$

La convergence de cette série est évidente, puisqu'on l'a obtenue en groupant d'une certaine manière les termes de la série (4) qui est uni-

formément convergente. De plus les termes sont rationnels en e et leurs infinis ne sont pas infiniment rapprochés dans le voisinage de

$$e' = 0 \quad \text{ou de} \quad e' = \infty$$

de telle sorte que l'on peut trouver une limite supérieure et inférieure des modules des valeurs de e' qui rendent infinie l'une des fonctions H''_k .

Il suit de là que dans le voisinage du point singulier $z = \alpha$ la fonction $\theta(z)(z - \alpha)^{2m}$ est holomorphe en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ ou en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ selon que l'on approche du point α par l'intérieur ou par l'extérieur du cercle fondamental.

En d'autres termes, α est pour la fonction θ un *point singulier logarithmique*.

Ainsi, si l'on envisage les différents sommets des polygones R , on reconnaîtra :

1° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 1^{re} et de la 3^{me} catégorie sont pour la fonction θ des points ordinaires ou des pôles.

2° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 3^{me} sous-catégorie sont des points singuliers logarithmiques.

3° que les sommets qui font partie d'un cycle de la 4^{me} sous-catégorie sont des points singuliers d'une nature plus élevée.

§ 3. Zéros et Infinis.

Nous allons maintenant étudier la distribution des zéros et des infinis de la fonction θ . Il est clair que si un point z est pour cette fonction un zéro ou un infini, il en sera de même de tous les points correspondants à z , c'est à dire de tous les points $\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. De cette façon à tout zéro contenu à l'intérieur du polygone R_0 , correspondra un zéro contenu dans chacun des polygones R , et que nous ne regarderons pas comme *réellement distinct* du premier. De sorte que le nombre des zéros et des infinis *réellement distincts* de la fonction θ sera le nombre des zéros et des infinis contenus à l'intérieur de R_0 , si la fonction n'existe que dans le cercle fondamental, et à l'intérieur de $R_0 + R'_0$ si elle existe dans tout

le plan. Je rappelle que R'_0 est le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental.

Cependant quelques conventions spéciales sont nécessaires, si l'on veut pouvoir énoncer simplement le résultat auquel nous allons arriver au sujet du nombre des zéros et des infinis. Il est d'abord évident qu'un zéro double ou un infini double doit compter pour deux zéros ou pour deux infinis; de même pour les zéros et les infinis multiples. Mais outre les zéros contenus à l'intérieur de R_0 , il peut y en avoir qui se trouvent sur le périmètre de ce polygone. Supposons qu'il y en ait un sur un côté ab de la 1^{ère} sorte, il y en aura un autre, correspondant au premier sur le côté conjugué de ab . Ces deux zéros ne seront pas réellement distincts et on ne devra les compter que pour un seul zéro, ou, si l'on veut, on devra compter chacun d'eux pour un demi zéro. Supposons maintenant qu'un sommet de la 1^{ère} catégorie soit un zéro d'ordre p ; les sommets qui font partie du même cycle seront au nombre de n par exemple et chacun d'eux sera un zéro d'ordre p comme le premier. Supposons que la somme des angles qui correspondent à ces sommets soit $\frac{2\pi}{K}$; chacun d'eux appartiendra à $n \cdot K$ polygones différents, de manière qu'on devra en quelque sorte le partager entre ces $n \cdot K$ polygones et que la part du polygone R_0 sera un zéro d'ordre $\frac{p}{n \cdot K}$. Il résulte de là que les différents sommets du cycle représenteront seulement $\frac{p}{K}$ zéros distincts.

Il est facile d'étendre cette convention au cas où l'un des zéros est un des sommets de la 2^{de} catégorie et appartenant à un cycle de la 3^{me} sous-catégorie. Nous avons vu que si α est un pareil sommet, la fonction θ peut se mettre sous la forme:

$$(z - \alpha)^{2m} \phi \left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha - z)}} \right]$$

ϕ étant une fonction holomorphe de $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha - z)}}$ s'annulant pour

$$z = \alpha$$

c'est à dire pour:

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha - z)}} = 0$$

$u = 0$ sera alors un zéro de la fonction rationnelle $\Phi(u)$. Supposons que ce soit un zéro d'ordre p . Nous dirons alors que les différents sommets du cycle auquel appartient α représentent p zéros distincts de la fonction θ .

Ce qui précède s'applique évidemment aux infinis.

Occupons-nous d'abord des infinis. La série (4) devient infinie quand $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ ou $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ devient infini. Supposons d'abord que la fonction θ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Alors $\frac{1}{\gamma_i z + \delta_i}$ ne peut devenir infini; de plus à chaque infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspondra en général un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ qui sera intérieur à R_0 .

Donc:

Le nombre des infinis distincts de θ est égal au nombre des infinis de H intérieurs au cercle fondamental.

Supposons maintenant que θ existe dans tout le plan.

A tout infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à R_0 .

A tout infini de $H(z)$ extérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ intérieur à R'_0 .

A l'intérieur de chacun des polygones R_i et par conséquent à l'intérieur de R'_0 , nous trouverons un des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ qui sont pour θ des infinis d'ordre $2m$. Il y a cependant une exception: les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les différents points correspondants de l'infini; la surface de l'un des polygones R' contient le point ∞ et ne contient pas de point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; le point ∞ n'est pas en général un infini de θ . Nous supposons, pour éviter cette difficulté, que le polygone R'_0 ne contient pas le point ∞ et nous pourrions énoncer le résultat suivant:

Le nombre des infinis de θ contenus à l'intérieur de $R_0 + R'_0$, c'est à dire *le nombre des infinis distincts de θ est égal au nombre des infinis de H augmenté de $2m$.*

Passons à la recherche des zéros. Parmi eux il y en a qui doivent

d'abord attirer l'attention; je veux parler des sommets de la 1^{ère} catégorie qui dans certains cas sont forcément des zéros d'ordre déterminé.

Soit α un sommet de la 1^{ère} catégorie et α' son symétrique par rapport au cercle fondamental. Supposons que α fasse partie d'un cycle et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K}$. L'une des substitutions de G sera:

$$\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}, e^{\frac{2i\pi}{K}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha'} \right) = (z, f_1(z))$$

Nous aurons:

$$\theta(f_1(z)) = \theta(z) \left(\frac{df_1}{dz} \right)^{-m}$$

ou

$$(5) \quad \theta(f_1)(f_1 - \alpha')^{2m} = \theta(z)(z - \alpha')^{2m} \left[\frac{d\left(\frac{f_1 - \alpha}{f_1 - \alpha'}\right)}{d\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)} \right]^{-m}$$

Mais:

$$\frac{f_1 - \alpha}{f_1 - \alpha'} = e^{\frac{2i\pi}{K}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha'}$$

Remarquons de plus que nous pouvons développer $\theta(z)(z - \alpha')^{2m}$ suivant les puissances de $\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}$; de façon à poser:

$$\theta(z)(z - \alpha')^{2m} = \theta_1\left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right) = \sum A_p \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p$$

L'équation (5) devient alors:

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{K}} \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p = \sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{K}} \left(\frac{z - \alpha}{z - \alpha'}\right)^p$$

Cette identité exige que l'on ait:

$$A_p = 0$$

ou bien:

$$e^{\frac{2ip\pi}{K}} = e^{-\frac{2mi\pi}{K}}$$

c'est à dire:

$$(6) \quad p + m \equiv 0 \pmod{K}.$$

Donc le développement de θ_1 ne contient que des termes dont l'ordre p satisfait à la congruence (6). Si donc K ne divise pas m , $z = \alpha$ est un zéro pour θ_1 et par conséquent pour θ .

Ce zéro est d'ordre au moins égal au reste de la division de $m(K - 1)$ par K ; et si l'ordre de ce zéro diffère de ce reste c'est d'un multiple de K . Il y a exception évidemment si α est un infini de θ .

De même nous avons vu que les sommets qui appartiennent à un cycle de la 3^{me} sous-catégorie sont en général des zéros de la fonction θ .

Nous allons maintenant chercher quel est le nombre des zéros réellement distincts de notre fonction θ et pour fixer les idées nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction de la 1^{ère} famille. Soit q le nombre des infinis distincts, soit p le nombre des zéros réellement distincts, c'est à dire le nombre cherché; soit maintenant p_0 le nombre des zéros situés à l'intérieur de R_0 en laissant de côté les zéros qui pourraient se trouver sur le périmètre et sur les sommets. Nous supposerons, ce qui arrivera en général, qu'il n'y a pas de zéro sur le périmètre en dehors de ceux qui sont sur les sommets; s'il y en avait, on n'aurait qu'à considérer les zéros situés sur les côtés comme des sommets séparant deux côtés consécutifs du polygone situés dans le prolongement l'un de l'autre. Supposons maintenant que les sommets se répartissent en un certain nombre de cycles de la 1^{ère} catégorie $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$. Supposons que tous les sommets du cycle C_i soient des zéros d'ordre p_i et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{K_i}$ de telle sorte que l'ensemble de ces zéros doivent être comptés, d'après la convention faite plus haut pour $\frac{p_i}{K_i}$ zéros distincts. On devra avoir:

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{K_i}$$

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i}$$

Le problème consiste à évaluer p_0 . Pour cela il faut prendre l'intégrale:

$$(7) \quad \int \frac{\theta'(z)dz}{\theta(z)}$$

le long du périmètre de R_0 . La partie réelle de cette intégrale sera nulle et la partie imaginaire s'écrira :

$$2i\pi(p_0 - q)$$

L'évaluation de l'intégrale (7) présente ici une difficulté spéciale.

En effet la fonction sous le signe \int devient infinie en divers points du contour d'intégration puisque nous avons vu qu'un certain nombre de sommets de R_0 étaient des zéros de θ . On tournera cette difficulté en décrivant autour de chacun de ces sommets comme centre des arcs de cercle infiniment petits, raccordant les deux côtés qui aboutissent au sommet considéré; il faudra décrire ces arcs de cercle à l'intérieur de R_0 , de façon à laisser les sommets en dehors du contour, puisque nous voulons évaluer p_0 , c'est à dire le nombre des zéros intérieurs à R_0 .

Il faudra donc évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets.

2° le long des côtés de la 1^{ère} sorte.

3° le long des côtés de la 2^{de} sorte.

Il suffira d'ailleurs de calculer la partie imaginaire de l'intégrale, car nous savons d'avance que la partie réelle est nulle, et cette partie imaginaire n'est autre chose que la variation de l'argument de θ .

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction de la 1^{ère} famille, de telle façon que nous n'ayons que des sommets de la 1^{ère} catégorie et des côtés de la 1^{ère} sorte. Soit $2n$ le nombre de ces côtés.

Considérons d'abord un des petits arcs de cercle décrit autour d'un sommet; supposons que ce sommet appartienne au cycle C_i dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{K_i}$ et dont tous les sommets sont des zéros d'ordre p_i . Soit λ l'angle du sommet considéré. L'intégrale prise le long du petit arc de cercle correspondant sera $-p_i\lambda$; prise le long de tous les arcs de cercle décrits autour des divers sommets du cycle, elle sera:

$$-\frac{2\pi}{K_i} p_i$$

Enfin l'intégrale (7) prise le long de tous les arcs infiniment petits décrits autour des sommets de R_0 sera:

$$- 2\pi \sum \frac{p_i}{K_i}.$$

Il reste à évaluer notre intégrale le long des côtés de la 1^{ère} sorte. Soient donc ab , $a'b'$ deux côtés conjugués de R_0 . Il faut calculer:

$$J = \int_a^b \frac{\theta' dz}{\theta} + \int_{b'}^{a'} \frac{\theta' dz}{\theta} = \int_a^b \frac{\theta' dz}{\theta} - \int_{a'}^{b'} \frac{\theta' dz}{\theta}$$

Soit $(z, f_i(z))$ celle des substitutions du groupe G qui change $a'b'$ en ab . Nous aurons, d'après ce qu'on a vu plus haut:

$$\theta(f_i) = \theta(z) \left(\frac{df_i}{dz} \right)^{-m}$$

ou:

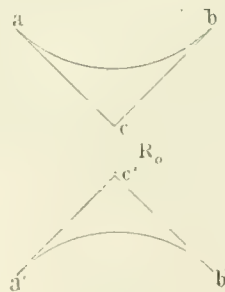
$$L\theta(f_i) = L\theta - m L \frac{df_i}{dz}.$$

Donc:

$$J = \int_{a'}^{b'} \left[\frac{\theta'(f_i)}{\theta(f_i)} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \right] dz = -m \int_{a'}^{b'} d \left[L \frac{df_i}{dz} \right]$$

Il reste donc à chercher comment varie la partie imaginaire de $L \frac{df_i}{dz}$ ou l'argument de $\frac{df_i}{dz}$ quand z varie de a' à b' .

Je rappelle que les côtés de R_0 , ab , $a'b'$ sont des arcs de cercle; je vais mener aux points a , b , a' , b' les tangentes aux arcs de cercle ab , $a'b'$; soient ac , bc ; $a'c'$, $b'c'$ ces tangentes. Soient maintenant ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 les arguments des quantités imaginaires $(c - a)$, $(b - c)$, $(c' - a')$, $(b' - c')$.



Supposons qu'on opère de la même manière pour tous les côtés du polygone curviligne R_0 ; on obtiendra un polygone rectiligne P_0 de $4n$ côtés, dont les côtés seront les tangentes menées aux côtés de R_0 par les sommets de R_0 et dont les sommets seront ceux de R_0 et les points tels que c , c' ; je désignerai simplement par les lettres c et c' les angles du

polygone P_0 qui correspondent aux sommets c et c' . Outre les sommets tels que c , le polygone P_0 admet $2n$ angles qui lui sont communs avec R_0 et dont la somme est $\sum \frac{2\pi}{K_i}$, d'où la relation:

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{K_i} = (4n - 2)\pi.$$

Nous pouvons écrire maintenant:

$$\arg. \frac{df_i}{dz} = \omega_1 - \omega_3 \quad \text{pour } z = a'$$

$$\arg. \frac{df_i}{dz} = \omega_2 - \omega_4 \quad \text{pour } z = b'$$

$$J = m(\omega_2 - \omega_1 - \omega_4 + \omega_3)$$

$$c = \omega_2 - \omega_1 + \pi$$

$$c' = \pi - \omega_4 + \omega_3$$

$$J = m(c + c' - 2\pi)$$

L'intégrale (7) prise le long de tous les côtés de la 1^{ère} sorte aura donc pour partie imaginaire $\sum J$ ou bien:

$$m \sum c - 2nm\pi$$

ou

$$(4n - 2)m\pi - 2\pi \sum \frac{m}{K_i} - 2nm\pi = (n - 1)2m\pi - 2\pi \sum \frac{m}{K_i}$$

L'intégrale (7) se réduit alors à:

$$2\pi\sqrt{-1} \left[n(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} \right]$$

d'où la relation:

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i}$$

Ce nombre p_0 des zéros intérieurs à R_0 est entier à cause des congruences:

$$p_i + m \equiv 0 \quad \text{mod. } K_i.$$

Exprimons maintenant le nombre p des zéros réellement distincts, défini par les conventions faites plus haut; nous trouverons:

$$p = q + m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m , du nombre $2n$ des côtés de R_0 et de la somme $\sum \frac{2\pi}{K_i}$ des angles de ce polygone.

Cette somme satisfait à l'inégalité:

$$\sum \frac{2\pi}{K} < \pi(2n - 2)$$

d'où

$$\sum \frac{1}{K_i} < n - 1$$

et par conséquent $p > q$. L'expression $\left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$ est proportionnelle à la S du polygone R_0 .

Supposons maintenant que la fonction θ soit de la 2^e ou de la 6^e familles. Nous n'aurons toujours que des côtés de la 1^{ère} sorte, mais outre les cycles de la 1^{ère} catégorie $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ que nous avons rencontrés dans le premier cas, nous aurons des cycles C'_1, C'_2, \dots, C'_i de la 2^{de} catégorie et de la 3^{me} sous-catégorie. Considérons le cycle C'_i ; divers sommets de ce cycle seront des zéros; je suppose d'après la convention faite plus haut qu'ils comptent pour h_i zéros distincts. On aura alors:

$$(8) \quad p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum h_i$$

Il faut évaluer l'intégrale (7):

1° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 1^{ère} catégorie.

2° le long des côtés de la 1^{ère} sorte.

3° le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la 2^{de} catégorie.

La première partie de l'intégrale se réduit comme plus haut à $-2i\pi \sum \frac{p_i}{K_i}$; la seconde à

$$\sum J = 2i\pi m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$$

Pour évaluer la troisième il suffit d'étudier comment varie l'argument de θ dans le voisinage des sommets de la 2^{de} catégorie; à cet effet, il faut mettre la fonction θ sous la forme:

$$(z - \alpha)^{-2m} \phi \left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(a-z)}} \right]$$

(ϕ étant l'algorithme d'une fonction holomorphe), ce qui est possible, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On reconnaîtra alors que cette 3^{me} partie de l'intégrale se réduit à $-2i\pi \sum h_i$.

Il restera donc pour l'expression de l'intégrale (7)

$$2i\pi \left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i \right]$$

d'où:

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i$$

et:

$$p = q + m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$$

Nous sommes conduits pour l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts à la même expression que dans le cas précédent. Cet excès est proportionnel au nombre m et dépend en outre du nombre des côtés du polygone R_0 et de la somme de ses angles; ou bien encore il est proportionnel à la fois à m et à la S de R_0 .

Supposons enfin que la fonction θ soit de la 3^{me}, de la 4^{me}, de la 5^{me} ou de la 7^{me} familles, c'est à dire existe dans tout le plan. Nous aurons alors des côtés de la 1^{ère} et de la 2^{de} sorte, des sommets de la 1^{ère} et de la 3^{me} catégorie et des sommets de la 2^{me} catégorie appartenant à des cycles de la 3^{me} sous-catégorie. Nous allons chercher le nombre

des zéros et des infinis distincts; ce nombre sera défini comme précédemment. Cependant il y a une remarque à faire au sujet du nombre des infinis distincts; ce sera en général le nombre des infinis intérieurs à R_0 et à R'_0 , mais une difficulté se présentera si le point ∞ fait partie de la région R'_0 . Dans ce cas il peut se faire que ∞ ne soit pas un infini de θ , mais que tous les transformés du point ∞ par les substitutions du groupe G soient des infinis de θ . Le nombre des infinis réellement distincts sera égal alors au nombre des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$ plus un. Pour éviter cette difficulté, je supposerai que le polygone R'_0 ait été choisi de telle sorte que le point ∞ ne fasse pas partie de la région R'_0 .

Cela posé reprenons l'intégrale (7); il va falloir l'évaluer le long du contour de R_0 , puis le long du contour de R'_0 et ajouter. Soit $2n$ le nombre des côtés de la 1^{ère} sorte; l celui des côtés de la 2^{de} sorte; conservons d'ailleurs les notations employées plus haut: p_0 et q représenteront alors le nombre des zéros et des infinis intérieurs à $R_0 + R'_0$.

Il faut évaluer l'intégrale

1° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la 1^{ère} catégorie.

2° le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la 3^{me} sous-catégorie.

3° le long des côtés de la 1^{ère} sorte.

4° le long des côtés de la 2^{de} sorte.

La première et la seconde partie de l'intégrale seront égales à

$$- 2i\pi \left(\sum \frac{p_i}{K_i} + \sum h_i \right).$$

La troisième sera égale comme plus haut à $\sum J$. Construisons un polygone P_0 en menant par les différents sommets de R_0 des tangentes aux côtés de la 1^{ère} sorte. Le polygone rectiligne ainsi obtenu aura $4n + l$ côtés; ses angles seront de deux sortes: les uns seront analogues aux angles que nous avons appelés plus haut c, c' ; les autres lui seront communs avec les angles de R_0 , mais parmi ceux-ci les uns, dont la somme sera $\sum \frac{2\pi}{K_i}$, correspondront aux sommets de la 1^{ère} catégorie; les autres, qui seront nuls, correspondront aux sommets de la 2^{de} catégorie;

les autres enfin, qui seront droits et au nombre de $2l$, correspondront aux sommets de la 3^{me} catégorie; d'où la relation:

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{K_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi$$

Or on a trouvé plus haut:

$$\sum J = m \sum c - 2nm\pi$$

on aura donc:

$$\sum J = 2i\pi m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$$

Appelons enfin $2\pi I$ la partie imaginaire de l'intégrale prise le long des côtés de la 2^e sorte; nous trouverons pour l'intégrale (7) prise le long de R_0 :

$$2i\pi[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum h_i + I]$$

Il faut prendre maintenant l'intégrale (7) le long de R'_0 . Supposons que, d'après les conventions faites plus haut, les sommets de la 1^{ère} catégorie de R'_0 comptent pour $\sum \frac{p'_i}{K_i}$ zéros distincts et ceux de la 2^{de} catégorie pour $\sum h'_i$ zéros distincts. Nous trouverons pour la valeur de l'intégrale prise le long de R'_0 en raisonnant comme plus haut:

$$2i\pi[m(n-1) - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum h'_i - I]$$

ou en ajoutant les deux intégrales:

$$2i\pi[2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum h_i - \sum h'_i]$$

d'où:

$$p_0 = q + 2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{K_i} - \sum \frac{p'_i + m}{K_i} - \sum (h_i + h'_i)$$

Mais si p désigne comme plus haut le nombre des zéros distincts, on aura:

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{K_i} + \sum \frac{p'_i}{K_i} + \sum h_i + \sum h'_i$$

d'où:

$$p = q + 2m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{K_i} \right)$$

Ainsi l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m , du nombre $2n$ des côtés de la 1^{ère} sorte et de la somme des angles de la 1^{ère} catégorie.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, dans tous les cas possibles, le nombre des zéros et celui des infinis distincts est toujours fini.

§ 4. *Fonctions Fuchsiennes.*

Si une fonction $F(z)$ est uniforme, si elle se reproduit par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien G de telle sorte que si

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

est une substitution de ce groupe on ait identiquement:

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z)$$

si enfin la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et d'infinis réellement distincts, je dirai que cette fonction est une *fonction fuchsienne*. Existe-t-il de pareilles fonctions? Il est aisé d'en former.

Considérons en effet deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de l'entier m , leur quotient sera une fonction fuchsienne. Il est aisé de généraliser ce procédé. Nous dirons que le nombre m est le *degré* de la série θ . Si nous envisageons ensuite un produit de plusieurs séries telles que θ , le degré de ce monôme sera la somme des degrés de tous les facteurs. Si nous considérons un polynôme entier par rapport à diverses séries θ , nous dirons que ce polynôme est homogène et de degré K si tous ses termes sont d'un même degré K ; le quotient de deux polynômes homogènes de degrés K et K' sera une fonction rationnelle homogène de degré $K - K'$. Il est clair que toute fonction rationnelle, homogène de degré 0 par rapport à diverses

séries θ est une fonction fuchsienne. Nous verrons plus tard comment toute fonction fuchsienne peut s'exprimer de cette façon.

Quelles sont les propriétés des fonctions fuchsiennes?

1° *Les singularités sont les mêmes que celles des fonctions thétafuchsiennes*; nous avons par conséquent des fonctions fuchsiennes n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et pour lesquelles toute la circonférence de ce cercle est une ligne singulière essentielle, et d'autres qui existent dans tout le plan et dont les points singuliers, situés tous sur le cercle fondamental, sont isolés quoique en nombre infini.

2° Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne $F(z)$ est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal d'autre part au nombre des zéros distincts de la fonction fuchsienne $F(z) - a$, c'est à dire au nombre des points réellement distincts pour lesquels $F(z)$ prend la valeur a . En conséquence, le nombre des points intérieurs à R_0 (ou à $R_0 + R'_0$) et pour lesquels $F(z)$ reprend une même valeur est *constant* et *fini*.

3° Soient deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ correspondant à un même groupe fuchsien G , et supposé que la première reprenne p fois et la seconde p_1 fois la même valeur à l'intérieur de R_0 , je dis qu'il y aura entre F et F_1 une relation algébrique. En effet à chaque valeur de F correspondent p_1 valeurs de F_1 ; toute fonction symétrique de ces p_1 valeurs est méromorphe en F pour toutes les valeurs de F finies ou infinies. Toutes ces fonctions symétriques sont donc des fonctions rationnelles de F ; donc F_1 elle-même est fonction algébrique de F .

C. Q. F. D.

4° Considérons maintenant toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe G . Entre deux quelconques d'entre elles nous venons de voir qu'il y a une relation algébrique. Il suit de là que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y . Nous aurons d'ailleurs entre x et y une relation algébrique

$$(1) \quad \varphi(x, y) = 0$$

quel est le genre de la relation (1) ou ce qui revient au même celui de la surface de RIEMANN correspondante? Pour résoudre cette question, il faut se reporter au § 7 du mémoire sur les groupes fuchsien, paragraphe

intitulé *Classification en genres*; dans ce paragraphe, je supposais que l'on découpait la région R_0 (ou $R_0 + R'_0$) puis qu'on la repliait en la déformant de manière à recoller ensemble les côtés conjugués et à obtenir ainsi une surface fermée. Il est clair qu'au point de vue de la géométrie de situation la surface fermée ainsi obtenue ne diffère pas de la surface de RIEMANN qui nous occupe. Il en résulte que le genre de la relation (1) et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide d'une seule d'entre elles que j'appellerai x .

On peut éviter ces considérations empruntées à la géométrie de situation. C'est ce que j'ai fait dans un travail inséré dans les mémoires de l'Académie de Caen où je détermine le genre de la relation (1) par le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y) , mais on est conduit ainsi à une discussion assez longue.

5° Considérons la fonction fuchsienne que nous venons d'appeler x et formons les deux fonctions suivantes:

$$(2) \quad v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \quad v_2 = z \sqrt{\frac{dx}{dz}}.$$

Il est clair que l'on aura:

$$\frac{1}{v_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{4 \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{dx}{dz} - 3 \left(\frac{d^2 x}{dz^2} \right)^2}{4 \left(\frac{dx}{dz} \right)^3}$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z ; c'est donc, d'après ce que nous venons de voir, une fonction rationnelle de x et de y , que j'appellerai $\varphi(x, y)$.

Les deux intégrales de l'équation linéaire:

$$(3) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x, y)$$

sont donc:

$$v = v_1 \quad v = v_2$$

Ainsi la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, y) . On voit que la variable indépendante x

s'exprime par une fonction fuchsienne de z , c'est à dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne on en déduit les intégrales elles-mêmes à l'aide des formules (2).

Dans le cas particulier où le groupe G est de genre 0, l'équation (3) pourra s'écrire :

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de x seulement; dans ce cas en effet, nous venons de voir que toute fonction fuchsienne s'exprime rationnellement en x .

Cherchons maintenant quels sont les points singuliers de l'équation (3) et comment se comportent les intégrales dans le voisinage de chacun d'eux. En général, les intégrales seront des fonctions holomorphes de x ; il y aura deux exceptions qui nous donnent deux sortes de points singuliers.

1° pour les points singuliers de la relation (1), y cesse d'être fonction holomorphe de x , et il en est de même des intégrales v_1 et v_2 ; mais v_1 et v_2 restent *fonctions holomorphes du point analytique* (x, y) . Nous n'avons donc pas ainsi un véritable point singulier.

2° pour les points (x, y) qui correspondent aux divers sommets du polygone R_0 . Dans cette seconde espèce de points singuliers, nous distinguerons 1° ceux qui correspondent à des sommets de la 1^{ère} catégorie. Dans le voisinage d'un pareil point singulier, les intégrales de l'équation (3) sont régulières, pour employer l'expression de M. Fuchs. Si nous formons maintenant l'équation déterminante correspondant à ce point singulier, la différence des racines de cette équation est l'inverse d'un nombre entier. En effet le point singulier correspond à un sommet de R_0 qui fait partie d'un cycle de la 1^{ère} catégorie et la somme des angles de ce cycle est égal à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier; on voit aisément que la différence des racines de l'équation déterminante est précisément $\frac{1}{p}$.

Dans le cas particulier où le sommet de R_0 envisagé appartient à un cycle de la 1^{ère} sous-catégorie, on a $p = 1$, d'après la définition même de cette sous-catégorie. Par conséquent la différence des racines de l'équa-

tion déterminante est l'unité. Un semblable point n'est donc pas un point singulier.

2° Considérons maintenant un point singulier qui corresponde à un sommet de R_0 appartenant à un cycle de la 2^{de} catégorie. Ce cycle sera de la 3^{me} sous-catégorie, puisque, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de cycle de la 4^{me} sous-catégorie. Formons l'équation déterminante correspondant à un pareil point singulier; les racines de cette équation seront égales et les intégrales de l'équation (3) seront *logarithmiques* mais *régulières*.

3° Il faudrait envisager enfin les points analytiques (x, y) qui correspondent à des sommets de la 3^{me} catégorie, mais on reconnaîtrait aisément que ce ne sont pas des points singuliers.

En résumé les intégrales de l'équation (3) sont partout régulières et (si on laisse de côté les points singuliers de la relation (1)) le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (3) est égal à celui des cycles de la 2^{me} ou de la 3^{me} sous-catégories que présente le polygone R_0 (ou les deux polygones R_0 et R'_0).

§ 5. 1^{ère} famille; genre 0.

Après avoir étudié les propriétés des fonctions fuchsiennes en général, nous allons nous occuper séparément des diverses familles et des divers genres entre lesquels se répartissent ces fonctions; nous commencerons par l'étude spéciale des fonctions les plus simples; celles de la 1^{ère} famille et du genre 0.

Je rappelle d'abord quelle est pour de semblables fonctions la forme du polygone R_0 . Les côtés sont tous de la première sorte et au nombre de $2n$; les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués et par conséquent congruents. Les cycles sont au nombre de $n + 1$; deux d'entre eux ne contiennent qu'un seul sommet, le premier le sommet de rang 1; le second le sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles sont formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$. (C'est l'exemple II du § 7 du mémoire sur les groupes fuchsien.)

Un cas particulier remarquable est celui où le polygone R_0 est symétrique par rapport à l'arc de cercle qui coupe orthogonalement le

cercle fondamental et qui joint les sommets de rang 1 et $n + 1$. Je dirai alors simplement que ce polygone est symétrique.

Dans le cas qui nous occupe, le genre est égal à 0 et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai x ou bien $f(z)$. Cette condition ne détermine pas complètement la fonction $x = f(z)$. Si en effet toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de x , elles s'expriment aussi rationnellement à l'aide de $\frac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c, d étant des constantes quelconques. Il faut donc pour définir complètement la fonction $x = f(z)$ s'imposer encore trois conditions. Voici celles que nous choisirons. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n+1}$ les sommets de rang 1, 2 et $n + 1$; nous supposons que l'on a :

$$f(\alpha_1) = 0 \qquad f(\alpha_2) = 1 \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

La fonction $f(z)$ sera alors entièrement déterminée. A l'égard de cette fonction, je remarquerai ce qui suit. Si le polygone R_0 est symétrique, la fonction $f(z)$ est réelle et positive sur tout le périmètre de ce polygone.

J'appellerai α_i le sommet de rang i ; ce sommet formera avec α_{2n+2-i} un cycle dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{\beta_i}$, β_i étant un nombre entier. Enfin je poserai :

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = \infty.$$

Pour $z = \alpha_i$, les $\beta_i - 1$ premières dérivées de $f(z)$ s'annulent de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme :

$$f(z) = a_i + b_1(z - \alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z - \alpha_i)^{\beta_i + 1} + \dots$$

Pour $z = \alpha_{n+1}$, $f(z)$ est un infini d'ordre β_{n+1} de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme :

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1} + 1}} + \dots$$

Nous avons vu que si l'on pose :

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v ainsi définie satisfait à une équation

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x . Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$. On trouve aisément :

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme en x de degré $2n-2$.

Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$P(a_i) = -Q'(a_i) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2} \right)$$

Nous désignons par la notation $Q'(x)$ la dérivée de $Q(x)$. De plus le coefficient de x^{2n-2} dans $P(x)$ doit être égal à

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2} \right)$$

Voilà donc $n+1$ conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le polynôme $P(x)$ pour que l'équation (3 bis) soit intégrable de la façon que nous avons dite. Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, le polynôme $P(x)$ étant de degré $2n-2$, il reste dans ce polynôme $n-2$ paramètres arbitraires; mais dans ces $n-2$ paramètres qui sont des quantités *complexes*, je dois distinguer les parties réelle et imaginaire de telle façon qu'ils équivalent à $2n-4$ paramètres *réels*. Or combien avons-nous de paramètres arbitraires dans le groupe G . Le groupe G est défini par un polygone R_0 de $2n$ côtés. Pour définir un pareil polygone il faut en général $4n-3$ conditions. Mais notre polygone n'est pas quelconque: en effet les côtés conjugués doivent être congruents ce qui fait n conditions; la somme des angles des divers cycles doit être respectivement égale à $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \dots, \frac{2\pi}{\beta_{n+1}}$ ce qui fait $n+1$ conditions. Il reste

donc en tout dans notre groupe G $2n - 4$ paramètres arbitraires. Dans notre fonction $\varphi(x)$ au contraire nous avons $2n - 4$ paramètres qui restent arbitraires dans $P(x)$; nous avons en outre dans $Q(x)$ $n - 2$ paramètres complexes arbitraires, à savoir a_3, a_4, \dots, a_n ; cela équivant à $2n - 4$ paramètres complexes. Donc dans la fonction $\varphi(x)$ il y a $2n - 4$ paramètres arbitraires de plus que dans le groupe G . Donc pour que l'équation (3 bis) s'intègre de la façon que j'ai dite il faut, outre les conditions énoncées plus haut, que $2n - 4$ autres conditions soient remplies. Ces conditions sont transcendantes et très compliquées; leur étude trouvera place dans un autre mémoire.

Supposons maintenant que l'on se donne a_3, a_4, \dots, a_n , c'est à dire les points singuliers de l'équation (3 bis), $Q(x)$ sera déterminé et il nous restera les $2n - 4$ paramètres de $P(x)$. Le nombre des paramètres restés arbitraires est alors précisément le nombre des conditions à remplir. Dans une question où n'entreraient que des fonctions algébriques ou des transcendentes simples, on pourrait conclure de là que l'on peut toujours disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions, et par conséquent qu'il existe toujours une équation de la forme (3 bis) intégrable par les fonctions fuchsiennes seules et où les points singuliers $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sont donnés à l'avance. Mais ici nous ne pouvons nous contenter d'un pareil aperçu et ce théorème, fort important, exigera une démonstration spéciale que je donnerai dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique, les points singuliers a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ainsi que les coefficients de $P(x)$ sont réels.

Dans le cas plus particulier encore où $n = 2$, l'équation (3 bis) se ramène aisément à l'équation hypergéométrique de GAUSS. De plus nous avons $2n - 4 = 0$, de telle sorte que le nombre des conditions transcendantes dont il a été question plus haut est nul. Alors pour que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut et il suffit que:

$$P(0) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_1^2}\right)$$

$$P(1) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2^2}\right)$$

$$\text{coefficient de } x^2 \text{ dans } P(x) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_3^2}\right)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant entiers.

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes.

Soit $\theta(z)$ une fonction thétafuchsienne jouissant de la propriété caractéristique

$$\theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

Reprenons la fonction fuchsienne $f(z) = x$ et sa dérivée $f'(z)$, il est clair que la fonction

$$\frac{\theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle de x . Nous avons donc pour l'expression générale des fonctions $\theta(z)$:

$$(1) \quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

F étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Parmi les fonctions thétafuchsiennes, nous avons vu qu'il y en avait de deux espèces; les unes devenant infinies, les autres ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Quelle sera la forme générale de celles de la 2^{de} espèce? L'expression (1) ne doit devenir infinie pour aucune valeur de x . Dans ce cas $F(x)$ ne pourra devenir infini que si $\frac{dx}{dz}$ devient nul, c'est à dire si x vient en l'un des points singuliers $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$.

Il suit de là que l'on doit avoir:

$$(2) \quad \theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\theta_p(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

$\theta_p(x)$ désignant un polynôme d'ordre p . Exprimons maintenant que $\theta(z)$ ne devient infini ni pour $x = a_1$, ni pour $x = a_2, \dots, ni pour $x = a_n$, ni pour $x = \infty$; il viendra:$

$$(3) \quad \begin{aligned} \lambda_i &< m \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ p &< \sum \lambda_i - m \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Ces $n + 1$ inégalités sont compatibles.

Ces inégalités ne permettent pas de donner à p des valeurs aussi grandes que l'on veut, de sorte qu'il existera toujours un nombre q tel que l'on ait constamment $p < q$ et que les inégalités (3) permettent à p d'atteindre la limite $q - 1$.

Supposons le nombre m donné; le nombre q sera alors déterminé et il est clair qu'entre q fonctions thétafuchsiennes de la n^e espèce, il y aura toujours une relation linéaire identique.

Si l'on se reporte à l'expression que nous avons donnée de ces transcendentes dans le § 1, on verra qu'il y entre une fonction rationnelle $H(z)$ renfermant un nombre infini de paramètres arbitraires. Il suit de là qu'il y a une infinité de fonctions rationnelles H , telles que la série thétafuchsienne correspondante soit identiquement nulle.

Il existe donc une infinité de relations identiques linéaires entre ces séries thétafuchsiennes. Nous les étudierons plus loin.

Revenons à l'expression (2). Jusqu'ici nous avons supposé que les nombres $m, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ qui y entrent étaient entiers. S'ils ne l'étaient pas, la fonction définie par cette expression ne jouirait plus de la propriété fondamentale des fonctions thétafuchsiennes, mais elle pourrait rester uniforme. Pour cela il suffit que les nombres:

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i \beta_{n+1}$$

soient entiers.

Il est clair que les $n + 1$ équations:

$$(4) \quad \begin{aligned} m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i &= \varepsilon_i \\ m(\beta_{n+1} + 1) - \sum \lambda_i \beta_{n+1} &= \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

où les ε sont des nombres entiers donnés fourniront toujours des valeurs pour les λ et pour m , car ce sont des équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul.

Supposons donc que dans les équations (4) on donne à tous les ε la valeur 0 excepté à ε_k auquel on donne la valeur 1. Portons ensuite

dans l'expression (2) les valeurs de m et des λ tirées des équations (4) et remplaçons dans cette même expression θ_p par une constante. Nous aurons défini une fonction X_k qui est holomorphe dans tout le cercle fondamental, et qui n'a d'autres zéros que le point α_k et les points correspondants. Tous ces zéros sont d'ailleurs simples.

Ces fonctions $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$, dont le rôle est très important, ont été découvertes par M. HALPHEN dans le cas particulier de $n = 2$. On peut trouver entre elles et x certaines relations intéressantes. Considérons en effet les séries X_1 et X_{n+1} . Soient m_1 et m_{n+1} les valeurs correspondantes du nombre m . Ces valeurs seront fractionnaires.

Soit en effet Y une fonction uniforme quelconque susceptible d'être mise sous la forme

$$(2 \text{ bis}) \quad Y = \left(\frac{dx}{dz} \right)^M \frac{K}{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

K désignant un facteur numérique. Cette fonction n'a d'autres zéros ou infinis que les points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ et leurs correspondants. Supposons que ces zéros soient respectivement d'ordre $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$; il va sans dire que si α_i par exemple était un infini γ_i serait négatif. On aura :

$$Y = K_1 X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \dots X_{n+1}^{\gamma_{n+1}}$$

K étant un facteur numérique. On aura en particulier :

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

et

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}}$$

les K étant toujours des facteurs numériques: d'où les relations identiques

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}.$$

Nous avons exprimé les fonctions thétafuchsiennes de deux manières tout à fait différentes; soit par la série (4) § 1, soit par la formule (1) de ce paragraphe.

Nous savons donc a priori qu'il existe une infinité d'identités de la forme :

$$\sum H \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right) (\gamma_i z + \delta_i)^{2m} = \left(\frac{dx}{dz} \right)^m F(x)$$

où H et F sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles.

Ecrire effectivement ces identités et en particulier reconnaître dans quel cas la fonction F est identiquement nulle, tel est le problème dont il s'agit maintenant de donner une solution aussi complète que possible.

Mais pour y arriver, il est nécessaire d'avoir recours à des considérations d'un ordre un peu différent.

Jusqu'ici nous avons toujours regardé le nombre m comme positif; supposons le maintenant entier, mais négatif. Considérons en particulier la fonction suivante :

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{-h} \frac{[f(z) - a_1]^{\mu_1} [f(z) - a_2]^{\mu_2} \dots [f(z) - a_n]^{\mu_n}}{[f(z) - f(z_1)] [f(z) - f(z_2)] \dots [f(z) - f(z_p)]}$$

Je suppose que h est un entier positif ainsi que les exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ et que ces nombres entiers satisfont ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur aux inégalités suivantes :

$$(5) \quad \begin{aligned} \mu_i &> h \left(1 - \frac{1}{\beta_i} \right) \\ \sum \mu &< h \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}} \right) + p. \end{aligned}$$

D'après ces inégalités la fonction $A(z)$ ne peut devenir infinie que si l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Il en résulte que les infinis de cette fonction sont tous simples et qu'ils sont compris dans l'une des formules :

$$(6) \quad \frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \dots, \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}$$

où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$

représente une des substitutions du groupe G .

Je dis que dans les formules (8) et (9) la fonction holomorphe $G(z)$ est identiquement nulle.

Première démonstration.

Considérons un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon r ; concentrique par conséquent au cercle fondamental.

Envisageons les différents polygones R_i qui sont tout entiers ou en partie à l'intérieur de ce cercle.

L'ensemble de ces polygones formera une figure polygonale S ne dépendant que du rayon r du cercle C . Considérons l'intégrale:

$$\int \frac{A(z)\varphi(z)dz}{z-x}$$

prise le long du contour de cette figure S . Le théorème que j'ai énoncé pourra être regardé comme démontré si j'établis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, c'est à dire vers le rayon du cercle fondamental.

Pour cela je vais faire voir:

1° que le périmètre de S reste fini, quel que soit r .

2° que le module de la fonction sous le signe \int reste plus petit qu'une certaine quantité M quand la variable reste sur le contour d'intégration.

3° que M tend vers 0 quand r tend vers 1.

En vertu du lemme IV du § 1, le nombre des polygones R_i qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle C est plus petit que:

$$N = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2)$$

σ et λ étant des quantités constantes et R étant défini par l'égalité:

$$r = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}$$

Donc a fortiori, le nombre des côtés de S sera plus petit que $2nN$. Considérons l'un de ces côtés appartenant à un polygone R_i et soit l_i la

longueur de ce côté; l_0 celle du côté correspondant de R_0 ; soit enfin $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ celle des substitutions de G qui correspond à R_i , on aura:

$$l_i < l_0 \cdot H$$

H étant la plus grand valeur que puisse prendre

$$\text{mod. } \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

quand la variable z décrit le côté l_0 .

Supposons que le polygone R_0 soit tout entier contenu dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{e^{2A} - 1}{e^{2A} + 1}.$$

En vertu du lemme V du § 1 on aura;

$$H < \frac{e^{2A} + e^{-2A} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}$$

Soit L le plus grand côté de R_0 . Le périmètre de S sera plus petit que:

$$2nN \cdot H \cdot L$$

ou a fortiori que:

$$\frac{2n\pi L}{\sigma} (e^{2A} + e^{-2A} + 2) \frac{2e^{2(R+A)}}{e^{2R}}.$$

Il sera donc fini.

C. Q. F. D.

Nous devons évidemment supposer que x ne se trouve sur aucun des contours d'intégration. La fonction $\frac{\varphi(z)}{z - x}$ est alors une fonction rationnelle bien déterminée et ne devenant infinie pour aucune des valeurs de la variable situées sur les divers contours d'intégration. On peut donc aisément trouver une limite supérieure M_1 que son module ne peut dépasser.

Nous pourrions supposer aussi que la fonction $A(z)$ ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0 et nous pourrions trouver une limite

supérieure M_2 que son module ne peut dépasser quand z décrit le contour de R_0 . Mais on aura identiquement:

$$A\left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = A(z) \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h}}$$

On en conclut que quand z décrit le contour de S le module de $A(z)$ est plus petit que:

$$M_2 H^{2h}$$

et celui de la fonction sous le signe \int plus petit que:

$$M = M_1 M_2 H^{2h}$$

D'ailleurs quand r tend vers 1, M tend vers 0, puisque M_1 et M_2 sont des constantes et que H tend vers 0.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Deuxième Démonstration.

Posons:

$$\phi(z, a) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{a_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right)}{z - \frac{a_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Si dans cette expression on regarde z comme une constante, $\phi(z, a)$ sera une fonction thétafuchsienne de a . Supposons d'abord que z et a soient tous deux intérieurs au cercle fondamental; cette fonction thétafuchsienne ne deviendra infinie que pour $a = z$ et pour les points correspondants, c'est à dire pour $f(a) = f(z)$. Le résidu correspondant à l'infini $z = a$ sera égal à $-\varphi(z)$. On aura donc:

$$(10) \quad \phi(z, a) = \frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z) - f(a)} \frac{\theta_q[f(a)]}{F_1(a)} \frac{F_1(z) \varphi(z)}{\theta_q[f(z)] [f'(z)]^h}$$

Dans cette expression (10) $F_1(a)$ désigne le produit suivant:

$$[f(a) - a_1]^{\lambda_1} [f(a) - a_2]^{\lambda_2} \dots [f(a) - a_n]^{\lambda_n}$$

$\theta_q[f(a)]$ désigne un polynôme entier de degré q en $f(a)$ dont les coefficients peuvent être des fonctions de z .

Enfin les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et q doivent satisfaire aux inégalités (3)

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_i &< (h+1) \left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) \\ q &< \sum \lambda - (h+1) \left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1 \end{aligned}$$

On voit aisément en effet que telle doit être la forme de toute fonction thétafuchsienne de a n'admettant aucun infini distinct de l'infini $a = z$.

En comparant les inégalités (3) et (11) on trouve :

$$\lambda_i \leq \mu_i \quad q < p$$

Je me propose maintenant d'établir l'égalité (9) en montrant que $G(z)$ est identiquement nul, c'est à dire de démontrer l'identité :

$$\varphi(z)A(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \phi(z, z_k)$$

ou bien :

$$\varphi(z)A(z) = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z_k)}{F_1(z_k)} \theta_q[f(z_k)] \frac{F_1(z) \varphi(z)}{\theta_q[f(z)] [f'(z)]^h}$$

Nous pouvons simplifier le second membre en supposant que l'on a :

$$\lambda_i = \mu_i$$

Si cela n'avait pas lieu, on multiplierait $F_1(a)$ et $\theta_q[f(a)]$ par

$$[f(a) - a_1]^{\mu_1 - \lambda_1} [f(a) - a_2]^{\mu_2 - \lambda_2} \dots [f(a) - a_n]^{\mu_n - \lambda_n}$$

Le degré du polynôme $\theta_q[f(a)]$ serait alors augmenté, mais il resterait inférieur à p .

On peut donc toujours supposer

$$\lambda_i = \mu_i \quad \text{et par conséquent} \quad F(z) = F_1(z)$$

tout en continuant à supposer

$$p > q$$

L'identité à démontrer se simplifie alors et s'écrit :

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{F(z)\zeta(z)}{[f'(z)]^h} = \sum_k \frac{A_k}{f(z) - f(z_k)} \frac{\theta_q[f(z_k)] F(z)\zeta(z)}{\theta_q[f(z)] [f'(z)]^h}$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{\theta_q[f(z_k)] - \theta_q[f(z)]}{f(z) - f(z_k)} = P[f(z_k)]$$

P représentera un polynôme en $f(z_k)$ dont le degré sera égal à $q - 1$ et ne pourra par conséquent surpasser $p - 2$. L'identité à démontrer se réduit alors :

$$\sum A_k P[f(z_k)] = 0$$

et sous cette forme elle est évidente en vertu des relations (7). Le théorème énoncé est donc encore démontré.

Cette seconde démonstration nous conduit tout naturellement à un théorème important relatif aux fonctions thétafuchsiennes de 2^{de} espèce. Soit

$$(12) \quad \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}$$

une série où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. On a vu que cette série représente une fonction thétafuchsienne sans infini et peut être égale à une expression de la forme :

$$(13) \quad [f'(z)]^{h+1} \frac{\theta_{q-1}[f(z)]}{F(z)}$$

θ_{q-1} étant un polynôme de degré $q - 1$ en $f(z)$ et q étant le plus grand nombre entier satisfaisant aux inégalités (11).

Toute expression telle que (13) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles; donc toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles. Mais on peut faire deux hypothèses.

Ou bien toute expression telle que (13) peut être mise sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) ne peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles.

Ou bien il n'est pas possible de mettre toute expression (13) sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée.

Supposons la en effet satisfaite et soient:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1}$$

les $q-1$ fonctions telles que (12) à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \dots, z_q$$

q valeurs quelconques de z . On pourra toujours trouver q nombres

$$A_1, A_2, \dots, A_q$$

satisfaisant aux conditions:

$$A_1 \theta_1(z_1) + A_2 \theta_1(z_2) + \dots + A_q \theta_1(z_q) = 0$$

$$A_1 \theta_2(z_1) + A_2 \theta_2(z_2) + \dots + A_q \theta_2(z_q) = 0$$

$$\dots$$

$$A_1 \theta_{q-1}(z_1) + A_2 \theta_{q-1}(z_2) + \dots + A_q \theta_{q-1}(z_q) = 0$$

On aura alors quelle que soit la fonction H qui entre dans l'expression (12)

$$(14) \quad \sum_k \sum_i A_k H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right) (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)} = 0$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G ; on démontre aisément l'identité suivante en reprenant la fonction $\phi(z, z_k)$ définie plus haut et y faisant $\varphi(z) = 1$

$$(15) \quad \phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, z_k\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h} \phi(z, z_k) =$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} \frac{\left[\frac{(\gamma z + \delta)^{2h+1} - \left[\gamma \left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i} \right) + \delta \right]^{2h+1}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \right]}{(\gamma z + \delta)^{2h} \left[\gamma \left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i} \right) + \delta \right]^{2h+1}} =$$

$$= \sum_i (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2h-2} H\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)$$

$H(z)$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental.

Posons maintenant:

$$A(z) = \sum_k A_k \Phi(z, z_k)$$

Des formules (14) et (15) nous déduisons:

$$A\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right) - (\gamma z + \delta)^{-2h} A(z) = 0$$

Comme cela a lieu quelle que soit la substitution $\left(z, \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ que l'on ait choisie dans le groupe G , il faudrait que l'on eût:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$$

$F(x)$ étant rationnel en x .

Mais $A(z)$ n'aurait que q infinis distincts, z_1, z_2, \dots, z_q . Or il est aisé de voir qu'une fonction de la forme $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x)$ doit toujours avoir plus de q infinis distincts.

Donc l'hypothèse faite au début est absurde.

Donc toute expression de la forme (13) peut toujours être mise sous la forme (12).

Donc toute fonction de la forme (1) peut toujours être exprimée par une série de la forme (4) paragraphe 1 pourvu que $m > 1$.

Comment maintenant, étant donnée une série de la forme (4) § 1, pourrons nous la mettre effectivement sous la forme (1).

On donne une série $\theta(z)$ de la forme (4) et il s'agit de la mettre sous la forme:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

Nous connaissons d'abord les infinis de $\theta(z)$ et les résidus correspondants; mais cela ne suffit pas pour déterminer complètement $F(z)$; il reste dans cette fonction rationnelle un certain nombre de coefficients indéterminés. On peut d'abord calculer un nombre suffisant de valeurs de la

série $\theta(z)$ pour avoir des équations qui permettent de déterminer ces coefficients. Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Considérons la fonction

$$\theta(z) \left(\frac{dx}{dz} \right)^{-m} = F(x)$$

Elle devient infinie, non seulement quand $\theta(z)$ est infinie, mais quand $\frac{dx}{dz}$ est nul, c'est à dire pour :

$$z = a_1, z = a_2, \dots, z = a_n.$$

On développera alors la série $\theta(z) \left(\frac{dx}{dz} \right)^{-m}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha_i$ et on calculera les coefficients de toutes les puissances négatives. Quand ces coefficients seront connus, ainsi que les premiers coefficients du développement de x suivant les puissances de $z - \alpha_i$, la fonction $F(x)$ sera aussi connue.

Mais pour trouver ces coefficients eux-mêmes, il faut calculer un certain nombre de valeurs de la série $\theta(z)$ et de séries analogues. Il est pourtant des cas où cette difficulté peut être évitée.

Reprenons la fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{-h} \frac{F(z)}{[f(z) - f(z_1)] [f(z) - f(z_2)] \dots [f(z) - f(z_p)]}$$

que nous avons étudiée plus haut; nous avons démontré l'identité suivante:

$$(8) \quad A(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}$$

Différentions cette identité $2h + 1$ fois par rapport à z ; il viendra:

$$(16) \quad \frac{1}{(2h+1)!} \frac{d^{2h+1} A}{dz^{2h+1}} = - \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i} \right)^{2(h+1)}}$$

le second membre peut s'écrire:

$$- \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i} \right)^{2(h+1)}}$$

Remarquons que si dans le groupe G , nous avons la substitution $\left(z, \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, nous aurons également la substitution inverse $\left(z, \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - a_i}\right)$. C'est à dire que l'expression précédente peut s'écrire:

$$-\sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}$$

Le second membre de l'identité (16) est donc une série de la forme (4) § 1; il reste à mettre le premier membre sous la forme (1). C'est là un calcul qui ne présente pas de difficultés. J'en indique le résultat dans le cas de $h = 1$ et dans celui de $h = 2$. Soit

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} A_0(x)$$

et soient A_1, A_2 , etc. les dérivées successives de A_0 par rapport à x . Reprenons maintenant l'équation:

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x)$$

et soient φ_1, φ_2 , etc. les dérivées successives de φ par rapport à x . On aura dans le cas de $h = 1$

$$(17) \quad \frac{d^3 A}{dz^3} = (A_3 - 2A_0 \varphi_1 - 4A_1 \varphi) \left(\frac{dx}{dz}\right)^2$$

et dans le cas de $h = 2$

$$(18) \quad \frac{d^5 A}{dz^5} = (A_5 - 20A_3 \varphi - 30A_2 \varphi_1 - 18A_1 \varphi_2 - 4A_0 \varphi_3 + 64A_1 \varphi^2 + 64A_0 \varphi \varphi_1) \left(\frac{dx}{dz}\right)^3$$

On peut trouver une infinité de relations analogues à la relation (16) par divers procédés; par exemple en différentiant cette relation par rapport aux divers paramètres z_1, z_2, \dots, z_p .

Je vais maintenant poser un dernier problème que je ne résoudrai que partiellement.

Considérons la série (4) § 1

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

elle dépend de la fonction rationnelle H et je la représenterai pour cette raison par la notation :

$$\theta[z, H]$$

Comment faut-il choisir la fonction rationnelle H pour que θ soit identiquement nul?

La solution complète de ce problème serait sans doute très compliquée; mais on peut s'aider dans chaque cas particulier des considérations suivantes:

1° Si l'on a identiquement

$$\theta(z, H_1) = \theta(z, H_2) = 0$$

on aura également:

$$\theta(z, H_1 + H_2) = 0$$

2° Si la fonction rationnelle H peut se développer en une série convergente de la forme suivante:

$$(S) \quad k_1 H_1 + k_2 H_2 + \dots + k_n H_n + \dots$$

où k_1, k_2, \dots, k_n sont des coefficients constants et où H_1, H_2, \dots, H_n sont des fonctions rationnelles telles que:

$$\theta(z, H_n) = 0$$

Si la série (S) est convergente toutes les fois que z est intérieur au cercle fondamental, on aura identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

3° Si l'on a identiquement:

$$\theta(z, H) = 0$$

et si, $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ désignant une des substitutions de G , on pose:

$$H_1(z) = H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) (\gamma z + \delta)^{-2m}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z, H_1) = 0$$

En effet posons pour abrégé:

$$\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} = f_i(z) \quad \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f_1(z) \quad \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha} = f_1^{-1}(z)$$

la série (4) pourra s'écrire sous la forme:

$$\theta(z, H) = \sum H[f_1[f_1^{-1}(z)]] \left[\frac{df_1[f_1^{-1}(z)]}{dz} \right]^m$$

Remplaçons maintenant z par $f_1(z)$ dans l'équation identique

$$\theta(z, H) = 0$$

il viendra:

$$0 = \sum H[f_1[f_i(z)]] \left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)} \right]^m \left[\frac{df_i}{dz} \right]^m \left[\frac{dz}{df_1(z)} \right]^m = \theta(z, H_1) \left[\frac{dz}{df_1(z)} \right]^m$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

4° Soit, pour reprendre les notations employées au début de ce chapitre, α_r l'un des sommets du polygone R_0 , α'_r son symétrique par rapport au cercle fondamental. Une des substitutions de G s'écrira:

$$\left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r}, e^{\frac{2i\pi}{\beta_r}} \frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r} \right)$$

β_r étant un nombre entier connu. Si nous posons:

$$H(z) = \left(\frac{z - \alpha_r}{z - \alpha'_r} \right)^p \frac{1}{(z - \alpha'_r)^{2m}}$$

on aura identiquement:

$$\theta(z, H) = 0$$

à moins que:

$$p + m \equiv 0 \quad \text{mod. } \beta_r$$

En effet considérons les diverses substitutions (z, f_i) du groupe G , on peut en choisir une infinité

$$(z, \varphi_0), (z, \varphi_1), (z, \varphi_2), \dots (z, \varphi_n) \dots$$

et de telle sorte que chacune des fonctions $f_i(z)$ puisse être définie d'une manière et d'une seule par une relation de la forme suivante

$$\frac{f_i - a_r}{f_i - a'_r} = e^{\frac{2hi\pi}{\beta_r}} \frac{\varphi_k - a_r}{\varphi_k - a'_r}$$

h étant un entier égal ou inférieur à β_r . On aura alors:

$$\theta(z, H) = \sum_i \frac{(f_i - a_r)^p}{(f_i - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{df_i}{dz} \right)^m$$

ou

$$\theta(z, H) = \sum_0^\infty \sum_k^{\beta_r} \sum_h \frac{(\varphi_k - a_r)^p}{(\varphi_k - a'_r)^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz} \right)^m e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}}$$

Or si l'on n'a pas

$$p + m \equiv 0 \quad \text{mod. } \beta_r$$

on aura:

$$\sum_1^{\beta_r} e^{\frac{2h(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0$$

On aura donc

$$\theta(z, H) = 0$$

C. Q. F. D.

5° Reprenons l'identité

$$(9) \quad \varphi(z) A(z) = \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k)$$

ou

$$\Phi(z, z_k) = \sum_i \frac{\varphi \left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i} \right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Faisons y successivement

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \frac{1}{z - b}$$

b étant une quantité constante extérieure au cercle fondamental, nous obtiendrons deux identités de la forme (9).

Multiplions la première par $\frac{1}{z-b}$ et retranchons en la seconde; il viendra:

$$(19) \quad \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \eta(b, z_k) = 0$$

en posant:

$$\eta(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}$$

Posons encore

$$\theta(b, a) = - \frac{d^{2h+1} \eta}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!}$$

il viendra, en différentiant $2h+1$ fois la relation (19) par rapport à b :

$$(20) \quad \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \theta(b, z_k) = 0$$

Or $\theta(b, z_k)$ est une fonction thétafuchsienne de b . Le premier membre de l'identité (20) est donc une série de la forme (4) § 1. Nous obtenons donc ainsi une série de cette forme qui est identiquement nulle quand b , qui est ici la variable indépendante, reste *extérieure* au cercle fondamental.

Mais ce que nous cherchons, c'est une série de la forme (4) qui reste identiquement nulle quand la variable indépendante reste *intérieure* au cercle fondamental. Heureusement il est facile de passer d'un cas à l'autre. Posons en effet

$$b = \frac{1}{z}$$

On aura:

$$\frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} = \frac{1}{\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}}$$

$\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ désignant les quantités imaginaires conjuguées de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$; de sorte que les substitutions $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i} \right)$ forment un groupe G' conjugué de G .

De même en posant:

$$b_i = \frac{a_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} \quad z_i = \frac{a'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$$

on aura:

$$\frac{db_i}{db} = \frac{z_i^2}{z_i'^2} \frac{dz_i}{dz}$$

Nous aurons donc:

$$\theta(b, a) = \sum_i \frac{1}{(b_i - a)^{2h+2}} \left(\frac{db_i}{db} \right)^{h+1} = \sum_i \frac{z_i^{2h+2}}{(1 - az_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz} \right)^{h+1}$$

ou enfin

$$\theta(b, a) = z^{2h+2} \theta'(z, a)$$

en posant

$$\theta'(z, a) = \sum_i \frac{1}{(1 - az_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz} \right)^{h+1}$$

Nous arrivons à l'identité suivante:

$$\sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \theta'(z, z_k) = 0$$

Les fonctions θ' sont des fonctions thétafuchsiennes de z , de sorte que nous avons bien une identité de la forme cherchée. Mais le groupe des fonctions θ' n'est pas le groupe G , mais le groupe conjugué G' . Passons donc du groupe G' au groupe G en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il viendra:

$$\sum_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right]' \theta'_1(z, z'_k) = 0$$

Dans cette formule $\left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right]'$ et z'_k désignent les quantités imaginaires conjuguées de $\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ et de z_k et l'on a posé:

$$\theta'_1(z, a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que si nous posons:

$$H(z) = \sum_k \left[\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right]' \frac{1}{(1 - z'_k z)^{2h+2}}$$

nous aurons identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

tant que z restera intérieur au cercle fondamental.

6° Supposons que l'on ait identiquement

$$\theta(z, H) = 0$$

et que H dépende d'un paramètre arbitraire λ ; on aura également:

$$\theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0$$

En combinant de diverses manières les six principes qui précèdent on obtiendra une infinité de relations de la forme:

$$\theta(z, H) = 0$$

§ 6. 1^{ère} famille; genre quelconque.

Nous nous sommes étendus sur les fonctions de la 1^{ère} famille et du genre 0 parce qu'elles sont les plus simples de toutes et parce que les principes généraux, une fois démontrés dans ce cas particulier, s'étendent sans trop de peine aux fonctions de toutes les familles et de tous les genres. Nous insisterons moins sur les autres fonctions fuchsiennes et nous nous bornerons à faire connaître les particularités les plus remarquables qui les concernent.

Lorsque le polygone R_0 , tout en restant de la 1^{ère} famille, n'est pas de la forme simple étudiée dans le paragraphe précédent, ou n'est pas susceptible d'y être ramené, les fonctions fuchsiennes correspondantes sont de la 1^{ère} famille et de genre plus grand que 0.

Commençons par un exemple simple. Soit un polygone R_0 de $4n$ côtés et tel que les côtés opposés soient conjugués. Tous les sommets forment alors un seul cycle, de sorte que la somme de tous les angles

du polygone R_0 est une partie aliquote de 2π . Supposons d'abord qu'elle soit précisément égale à 2π . On pourra alors exprimer toutes les fonctions fuchsiennes dérivées du polygone R_0 à l'aide de deux d'entre elles que nous appellerons x et y , et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$(1) \quad \phi(x, y) = 0$$

qui est de genre n .

Reprenons l'équation (3) du § 4. Elle s'écrit:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

et l'on a identiquement:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4} \frac{(x'')^2}{(x')^4}$$

en désignant par x' , x'' , x''' , les dérivées successives de x par rapport à z .

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(x, y)$? Pour simplifier, je vais supposer que la fonction y de x définie par l'équation (1) ne présente que des points singuliers de la nature la plus simple; c'est à dire que toutes les fois que l'on a:

$$\frac{d\phi}{dy} = 0$$

on a, ou bien:

$$\frac{d\phi}{dx} \geq 0 \quad \frac{d^2\phi}{dy^2} \geq 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\phi(x, y) = 0$ à une tangente parallèle à l'axe de y et n'ayant avec la courbe qu'un contact du 1^{er} ordre) ou bien:

$$\frac{d\phi}{dx} = 0 \quad \left(\frac{d^2\phi}{dx dy} \right)^2 - \frac{d^2\phi}{dx^2} \frac{d^2\phi}{dy^2} \geq 0 \quad \frac{d^2\phi}{dy^2} \geq 0$$

(ce qui correspond pour la courbe algébrique $\phi(x, y) = 0$ à un point double ordinaire).

Nous supposons en outre que si l'équation (1) est d'ordre r , on a pour x infini, r valeurs finies et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$ (ce qui correspond pour la courbe $\phi(x, y) = 0$ à r directions asymptotiques distinctes).

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité; en effet on peut, parmi les fonctions fuchsienues correspondant au groupe G , choisir d'une infinité de manières les fonctions x et y de telle sorte que toutes les autres s'expriment rationnellement en x et y et ce choix peut toujours se faire de façon à satisfaire aux hypothèses précédentes.

Reprenons maintenant notre fonction $\varphi(x, y)$. Il est clair que pour les valeurs infinies de x , elle reste finie; qu'elle est finie également toutes les fois que x' n'est pas nul. Or x' ne peut s'annuler que si l'on a à la fois

$$\frac{d\phi}{dy} = 0 \qquad \frac{d\phi}{dx} \geq 0$$

Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ sont donc les points singuliers de l'équation (1) en n'y comprenant que les points singuliers ordinaires et non les points doubles de la courbe (1).

Considérons l'un de ces infinis, et soient α, β, γ les valeurs correspondantes de x , de y et de z . On voit aisément que le développement de $x - \alpha$ commence par un terme en $(z - \gamma)^2$, celui de $y - \beta$ par un terme en $z - \gamma$ et on en conclut que l'on a :

$$\lim. (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = \alpha, y = \beta)$$

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer complètement la fonction $\varphi(x, y)$. Celle-ci est assujettie en outre à un certain nombre de conditions transcendantes dont l'étude approfondie fera l'objet d'un mémoire ultérieur. Nous démontrerons de plus, dans un autre mémoire, que si ces conditions ne sont pas remplies, mais si les coefficients de $\varphi(x, y)$ satisfont à certaines inégalités, x n'est plus, il est vrai, fonction fuchsienne de z , mais en est encore fonction uniforme (Kleinéenne).

De combien de paramètres distincts dépend notre groupe G ?

Pour définir un polygone de $4n$ côtés, il faut $8n - 3$ conditions; mais notre polygone R_0 n'est pas arbitraire. Il est assujetti à $2n + 1$

conditions, à savoir que les côtés opposés soient congruents et que la somme des angles soit égale à 2π . Il reste donc $6n - 4$ paramètres arbitraires. Mais on a vu, au § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, qu'un même groupe G pouvait être considéré comme dérivé d'une infinité de polygones différents et, en effet, dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer le polygone R_0 par un autre R'_0 ayant ses côtés en même nombre et disposés de la même manière, mais ayant pour sommet un point quelconque du plan; de sorte qu'à un même groupe G correspond une double infinité de polygones R_0 et que le nombre des paramètres de G est de deux unités inférieur à celui des paramètres de R_0 . *Le groupe G dépend donc de $6n - 6$ paramètres.*

De combien de paramètres dépend la relation (1)? Bien entendu, je ne considère pas comme distinctes deux relations:

$$\phi(x, y) = 0 \qquad \phi_1(\xi, \eta) = 0$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation uniforme, c'est à dire en remplaçant ξ et η par des fonctions rationnelles de x et de y . La théorie des fonctions abéliennes nous apprend que ces paramètres sont, pour une relation du genre n , au nombre de $3n - 3$. Mais il s'agit de $3n - 3$ paramètres *complexes* qui correspondent à $6n - 6$ paramètres *réels*; c'est à dire que le nombre des paramètres dont dépend la relation (1) est précisément le même que celui des paramètres du groupe G . S'en suit-il que l'on puisse disposer des paramètres du groupe G de telle sorte que l'on ait entre x et y telle relation algébrique que l'on veut? C'est ce que nous démontrerons dans un mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier de $n = 1$, nous n'avons plus affaire à des fonctions fuchsiennes proprement dites. En effet, dans les polygones curvilignes R_0 dont tous les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental, la somme des angles est toujours plus petite que celle d'un polygone rectiligne d'un même nombre de côtés. Pour un quadrilatère, la somme des angles devrait être plus petite que 2π . Mais ici nous avons supposé que la somme des angles de notre polygone curviligne de $4n$ côtés était précisément 2π . Si l'on veut faire $n = 1$, le polygone R_0 devra devenir rectiligne, le rayon du cercle fondamental deviendra infini et le quadrilatère R_0 se réduira à un simple parallélogramme rectiligne; le groupe G se réduira alors à des substitutions de la

forme $(z, z + \alpha)$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent se réduiront à des fonctions doublement périodiques. C'est dans ce sens que l'on peut dire que les fonctions elliptiques sont des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.

Supposons donc $n > 1$. Le polygone R_0 peut présenter différentes formes de symétrie. Il peut d'abord être symétrique par rapport à un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental; dans ce cas, les coefficients des fonctions $\phi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont réels. Supposons maintenant qu'il soit symétrique par rapport à un point, ou qu'il puisse être ramené, soit par un changement convenable de la variable z , soit par l'application de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsien, à être symétrique par rapport à un point: dans ce cas la relation (1) se ramène à la relation hyperelliptique:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2n})$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant une intégrale abélienne de 1^{re} espèce:

$$(4) \quad \int g(x, y) dx$$

et remplaçons x et y par leurs valeurs en z ; il viendra:

$$\int g(x, y) dx = \int g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(z)$$

$g(z)$ désignant une fonction fuchsienne de z et $G(z)$ une fonction uniforme de z , holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et cessant d'exister à l'extérieur de ce cercle.

Soit $\left(z, \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien; on aura identiquement:

$$G\left(\frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = G(z) + K_i$$

K_i étant l'une des périodes de l'intégrale abélienne. Ainsi à chaque substitution de notre groupe correspond une des périodes de l'intégrale (4).

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Soit ab un des côtés du polygone R_0 ; on aura:

$$\int_a^b g(z) dz = G(b) - G(a)$$

$G(b) - G(a)$ sera alors une des périodes de l'intégrale (4) de sorte qu'à chaque côté de R_0 correspond une de ces périodes.

Si cd est le côté conjugué de ab , on aura évidemment:

$$G(b) - G(a) = G(c) - G(d)$$

Il en résulte qu'à deux côtés conjugués correspond la même période prise en sens contraire et qu'aux $2n$ paires de côtés conjugués de notre polygone, correspondra un système fondamental de $2n$ périodes de l'intégrale (4). Mais ces périodes ne seront pas les périodes normales.

Mais parmi les polygones équivalents à R_0 , en vertu de la règle du § 9 du mémoire sur les groupes fuchsiens, il en est un qui présente à cet égard une particularité remarquable. Considérons un polygone R'_0 de $4n$ côtés dont les sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif:

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n.$$

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment ce dernier sommet par les lettres d_n et d_0 . Je suppose que le côté $d_{i-1} a_i$ soit conjugué de $b_i c_i$ et que le côté $a_i b_i$ soit conjugué de $c_i d_i$. En d'autres termes le côté de rang $4p + 1$ est conjugué du côté de rang $4p + 3$, et le côté de rang $4p + 2$ conjugué du côté de rang $4p + 4$. On voit sans peine que tous les sommets d'un pareil polygone appartiennent à un même cycle et que le polygone R'_0 appartient au genre n . Je suppose de plus que la somme des angles soit égale à 2π ; on voit alors facilement qu'il peut être ramené à un polygone tel que R_0 par l'application de la règle du § 9.

Envisageons maintenant deux intégrales abéliennes de 1^{ère} espèce.

$$(4) \quad \int g(x, y) dx = \int g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(z)$$

$$(5) \quad \int g_1(x, y) dx = \int g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(z)$$

Posons:

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = - \int_{b_i}^{c_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(a_i) - G(d_{i-1}) = A_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = - \int_{c_i}^{d_i} g(z) \frac{dx}{dz} dz = G(b_i) - G(a_i) = B_i$$

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = - \int_{b_i}^{c_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(a_i) - G_1(d_{i-1}) = A'_i$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = - \int_{c_i}^{d_i} g_1(z) \frac{dx}{dz} dz = G_1(b_i) - G_1(a_i) = B'_i$$

Les périodes A_i, B_i, A'_i, B'_i des intégrales (4) et (5) correspondront ainsi aux divers côtés du polygone R'_0 .

Si maintenant nous prenons l'intégrale:

$$\int G_1(z) g(z) \frac{dx}{dz} dz$$

le long du périmètre de R'_0 , cette intégrale doit être nulle et en développant l'intégrale, on trouve sans peine l'identité bien connue:

$$\sum_i (A_i B'_i - B_i A'_i) = 0$$

ce qui prouve que les périodes A_i, B_i , etc. sont les périodes normales.

Je n'insiste pas sur ces considérations qui montrent quel parti on pourra tirer des fonctions fuchsienues pour l'étude des intégrales abéliennes.

Je suppose maintenant que la somme des angles de R_0 soit, non plus 2π , mais $\frac{2\pi}{\beta}$, β étant un entier.

Voyons quel changement cette hypothèse apportera dans ce qui précède. La relation (1) sera toujours de genre n . La fonction $\varphi(x, y)$ jouira des mêmes propriétés que dans le cas précédent, avec cette seule diffé-

rence qu'elle deviendra infinie pour $x = a$, $y = b$; c'est à dire pour les valeurs de x et de y qui correspondent aux sommets du polygone R_0 .

On aura alors:

$$\lim. (x - a)^2 \varphi(x, y) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta_2}\right) \quad (\text{pour } x = a, y = b)$$

Les points singuliers de l'équation (3) sont alors ceux de la relation (1) et le point a, b .

Considérons maintenant un polygone R_0 de la 1^{ère} famille, mais d'ailleurs tout à fait quelconque; soit $2n$ le nombre des côtés et p le nombre des cycles. Supposons, que si l'on calcule la somme des angles appartenant aux différents cycles, on trouve respectivement $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \dots, \frac{2\pi}{\beta_p}$, pour le 1^{er}, le 2^d, ... et le p^e de ces cycles. Les fonctions fuchsiennes dérivées de ce polygone R_0 s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$(1) \quad \phi(x, y) = 0$$

de genre:

$$P = \frac{n - p + 1}{2}.$$

Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_p, b_p)$ les valeurs que prennent x et y quand la variable z vient en l'un des sommets du 1^{er}, du 2^d, ou du p^e cycle.

J'appelle (c_i, d_i) les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\phi}{dy} = 0 \quad \frac{d\phi}{dx} \geq 0$$

J'appelle (e_i, f_i) les points analytiques pour lesquels on a:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dy} = 0$$

Je conserve d'ailleurs pour la fonction $\phi(x, y)$ que je suppose d'ordre r , les hypothèses faites plus haut. Le nombre des points c_i, d_i est alors:

$$r(r-1) + 2P - (r-1)(r-2) = 2r + 2P - 2$$

et celui des points e_i , f_i est

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - p$$

L'équation (3) s'écrira:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x, y)$$

La fonction $\varphi(x, y)$, rationnelle en x et en y , devient infinie:

1° pour $x = c_i$, $y = d_i$; on a alors:

$$\lim. (y - d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \quad (\text{pour } x = c_i, y = d_i)$$

2° pour $x = a_i$, $y = b_i$; on a alors:

$$\lim. (x - a_i)^2 \varphi(x, y) = \frac{1 - \beta_i^2}{4\beta_i^2} \quad (\text{pour } x = a_i, y = b_i)$$

Les conditions auxquelles on doit assujettir le groupe G pour que l'on ait entre x et y une relation (1) donnée et pour que les quantités (a_i, b_i) et les nombres entiers β_i aient des valeurs données sont au nombre de $6P - 6 + 2p$. Le nombre des paramètres dont dépend le groupe G est aussi de $6P - 6 + 2p$. Il ne s'en suit pas immédiatement que l'on puisse disposer de ces $6P - 6 + 2p$ paramètres de façon à satisfaire à ces $6P - 6 + 2p$ conditions. Mais je démontrerai dans un mémoire ultérieur qu'il en est effectivement ainsi et qu'il existe *toujours* deux fonctions fuchsiennes x et y qui correspondent à un même groupe G , entre lesquelles il y a une relation algébrique *donnée*

$$\psi(x, y) = 0$$

et qui pour p systèmes *donnés* de valeurs $(x = a_1, y = b_1), (x = a_2, y = b_2), \dots (x = a_p, y = b_p)$ voient leurs dérivées des $\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \dots, \beta_p - 1$ premiers ordres s'annuler, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ étant des nombres entiers *donnés*).

Etudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes. Leur forme générale sera:

$$(6) \quad \left(\frac{dx}{dz} \right)^m F(x, y)$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de y .

Quelles sont les conditions pour que cette fonction thétafuchsienne soit de 2^{de} espèce, c'est à dire reste holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $F(x, y)$ pourra toujours s'écrire

$$\frac{P(x, y)}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^m (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_p)^{\lambda_p}}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités:

$$\lambda_i \leq m \left(1 - \frac{1}{r} \right)$$

On reconnaîtra ensuite aisément quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (6) soit de 2^{de} espèce:

1° La fonction rationnelle $P(x, y)$ devra se réduire à un polynôme entier.

2° Les $p(r-1)$ points d'intersection de la courbe $\phi(x, y) = 0$ avec les droites $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_p$ [en exceptant les points singuliers $(x = a_1, y = b_1), (x = a_2, y = b_2), \dots, (x = a_p, y = b_p)$] devront appartenir à la courbe $P(x, y) = 0$; cette dernière devra avoir un contact d'ordre $\lambda_i - 1$ avec la courbe $\phi(x, y) = 0$ aux points où cette courbe rencontre la droite $x = a_i$ (en exceptant toujours le point singulier $x = a_i, y = b_i$).

Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à:

$$(r-1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) = (r-1) \sum \lambda$$

conditions.

3° Le degré du polynôme $P(x, y)$ devra être au plus égal à:

$$\sum \lambda + m(r-3)$$

4° Considérons maintenant les points $x = e_i, y = f_i$, c'est à dire les points doubles de la courbe $\phi(x, y) = 0$; ils devront appartenir à la

courbe $P(x, y) = 0$, et même (puisque $m > 1$) être pour cette courbe un point double. Enfin les deux branches de la courbe $P = 0$ devront avoir respectivement avec les deux branches de la courbe $\phi = 0$, un contact d'ordre $m - 2$. Cela équivaut pour le polynôme $P(x, y)$ à $2m - 1$ conditions pour chacun des points doubles $x = e_i, y = f_i$, c'est à dire en tout à

$$(2m - 1) \left(\frac{(r - 1)(r - 2)}{2} - P \right)$$

conditions.

Un polynôme de degré $\sum \lambda + m(r - 3)$ dépend de:

$$\frac{1}{2} \left[\sum \lambda + m(r - 3) + 1 \right] \left[\sum \lambda + m(r - 3) + 2 \right]$$

paramètres. Mais si l'on tient compte de la relation (1) et si l'on a:

$$(7) \quad \sum \lambda + m(r - 3) \geq r$$

ce nombre se réduit à:

$$r \sum \lambda + \left(m - \frac{1}{2} \right) r(r - 3).$$

Mais notre polynôme est assujéti d'une part à $(r - 1) \sum \lambda$, d'autre part à $(2m - 1) \left[\frac{(r - 1)(r - 2)}{2} - P \right]$ conditions. Il reste donc dans ce polynôme:

$$(8) \quad \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

paramètres arbitraires. Mais ce n'est là qu'une limite inférieure du nombre des paramètres arbitraires restant réellement dans notre polynôme. Car il se peut faire:

1° Que la condition (7) ne soit pas remplie. Alors l'expression des paramètres arbitraires restant dans notre polynôme n'est plus

$$\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

mais:

$$\frac{1}{2} \left(\sum \lambda + m(r-3) + 1 \right) \left(\sum \lambda + m(r-3) + 2 \right) - (r-1) \sum \lambda - (2m-1) \left(\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right)$$

Cette seconde expression diffère de la première de:

$$\frac{1}{2} \left(\sum \lambda + m(r-3) - r + 1 \right) \left(\sum \lambda + m(r-3) - r + 2 \right)$$

Il en résulte que les deux expressions ne diffèrent pas si l'on a:

$$\sum \lambda + (m-3) - r = -1 \text{ ou } -2$$

L'expression (8) ne cesse par conséquent de représenter le nombre des paramètres restés arbitraires que si l'on a:

$$\sum \lambda + (m-1)r - 3m < -2$$

Or cette inégalité jointe à $m \geq 2$, $r \geq 3$, entraîne les égalités suivantes:

$$r = 3 \qquad \sum \lambda = 0$$

Mais ce cas où l'on a $r = 3$, $P = 1$, $\sum \lambda = 0$ et où par conséquent tous les λ sont nuls, est précisément celui des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à nous occuper.

2° On peut se demander aussi si les

$$(r-1) \sum \lambda + (2m-1) \left[\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P \right]$$

conditions auxquelles nous avons assujéti notre polynôme sont toutes distinctes. Voici comment on peut tourner la difficulté. Soit N le nombre des zéros distincts de l'expression (6); le nombre $N + 1$ sera évidemment une limite supérieure du nombre des paramètres restés arbitraires dans cette expression. Mais cette limite peut encore être abaissée. En effet l'expression (6) s'annule quand la variable z vient en l'un des sommets de R_0 ; ce sont là des zéros qui ne sont pas arbitraires. Si donc N' est le nombre des zéros réellement distincts qui coïncident avec les sommets

de R_n , nous devons prendre pour notre limite supérieure $N - N' + 1$. Ce n'est pas tout. Si l'on considère une expression rationnelle en x et y , admettant q zéros et q infinis, la théorie des intégrales abéliennes nous apprend qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les q zéros et les q infinis, mais que la connaissance des q infinis et de $q - P$ des zéros suffit pour déterminer les P derniers zéros. Or les $N - N'$ zéros qui restent de notre expression (6) sont ceux de la fonction rationnelle:

$$\frac{P(x, y)}{[F'(y)]^m (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_p)^{\lambda_p}}$$

dont nous connaissons les infinis. Il en résulte que $N - N' - P$ d'entre eux suffisent pour déterminer tous les autres et que nous devons prendre finalement pour notre limite supérieure $N - N' - P + 1$.

Or les principes du § 3 nous donnent:

$$N = m \left(n - 1 - \sum \frac{1}{\beta_i} \right)$$

$$N' = \sum_{\beta_i} m(\beta_i - 1) - \sum \lambda_i \beta_i - m_{P'} - m \sum \frac{1}{\beta_i} - \sum \lambda_i$$

$$N - N' - P + 1 = \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$$

c'est à dire que notre limite supérieure coïncide avec la limite inférieure trouvée plus haut. Il y aurait exception dans le cas $\sum \lambda = 0$, $P = 1$ c'est à dire dans le cas des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à parler.

Il résulte de là que toutes les fonctions thétafuchsiennes de la 2^{de} espèce (aussi bien celles qui peuvent s'exprimer par une série de la forme (4) § 1 que celles qui ne peuvent s'exprimer par une pareille série) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles.

Considérons maintenant une fonction de la forme:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{1-m} F(x, y)$$

R' désignant une fonction rationnelle en x et en y et cherchons quel est le minimum du nombre des infinis distincts d'une pareille expression.

Nous supposons que les sommets de R_0 ne sont pas des infinis de notre fonction $A(z)$. Pour que le nombre des infinis soit minimum il faut que celui des zéros le soit aussi, il faut par conséquent que les sommets de R_0 soient des zéros d'un ordre aussi peu élevé que possible. Pour réaliser cela, posons, ce qui est toujours possible :

$$P(x, y) = \frac{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_p)^{\lambda_p} \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^{m-1}}{P(x, y)}$$

les λ étant précisément les nombres entiers définis plus haut. Nous reconnaitrons que pour que le nombre des zéros distincts soit un minimum, il faut et il suffit 1° que $P(x, y)$ soit un polynôme entier de degré

$\sum \lambda + (m - 1)(r - 3)$, 2° que la courbe $P = 0$ passe par tous les points d'intersection de la courbe $\phi = 0$ avec les droites $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_p$, autres que les points singuliers $(x = a_i, y = b_i)$ et que les deux courbes aient en ces points un contact d'ordre $\lambda_i - 1$. 3° enfin que la courbe $P = 0$ admette les mêmes points doubles que $\phi = 0$; et de façon que les branches qui se croisent en ces points doubles aient avec celles de $\phi = 0$ des contacts d'ordre $m - 2$.

En effet il est possible de satisfaire à ces conditions, car le polynôme $P(x, y)$ contient comme on l'a vu :

$$r \sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2} \right) r(r - 3)$$

paramètres et nous n'avons à remplir que :

$$(r - 1) \sum \lambda + \left(m - \frac{3}{2} \right) [(r - 1)(r - 2) - 2P]$$

conditions.

Il reste donc :

$$\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

paramètres arbitraires dans notre polynôme $P(x, y)$. De plus on voit aisément que si nos conditions sont remplies, le nombre des zéros distincts

et par conséquent celui des infinis est minimum, car le nombre des zéros distincts qui se confondent avec les sommets de R_0 est aussi petit que possible et il n'y a pas de zéro en dehors de ces sommets. On trouve, en appliquant la règle du § 3 que le nombre minimum des infinis est

$$J = \sum \lambda + (2m - 2)(P - 1)$$

Comme le polynôme $P(x, y)$ ne dépend que de $\sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$ paramètres il s'en suit que nos J infinis distincts ne peuvent pas être choisis arbitrairement, mais que la connaissance de $J - P$ d'entre eux suffit pour déterminer les P autres. On ne peut donc en général déterminer la fonction A de telle sorte qu'elle ait J infinis donnés et qu'elle n'en ait pas d'autres.

Quel est le plus petit nombre J' tel que l'on puisse toujours déterminer la fonction A de telle sorte qu'elle ait J' infinis donnés et n'en ait pas d'autres? La fonction A admettra alors $J' - J$ zéros et $J' - J$ infinis distincts de plus que les fonctions de même forme qui n'ont que J infinis, et par conséquent elle contiendra $2J' - 2J$ paramètres de plus qu'elles, ou en tout

$$2J' - 2J + \sum \lambda + (2m - 3)(P - 1)$$

ou, en remplaçant J par sa valeur:

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1)$$

on doit donc avoir

$$2J' - \sum \lambda - (2m - 1)(P - 1) \geq J + 1$$

ou

$$(9) \quad J' \geq \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) + 1$$

Voilà donc la limite inférieure cherchée du nombre J' .

Maintenant nous allons pouvoir résoudre une question importante qui se pose tout naturellement. Nous avons vu que toutes les expressions

de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce pouvant toutes se mettre sous la forme (6) pourront donc s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ d'entre elles. Mais nous ne savons pas encore si toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer par une série (4) § 1. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce, s'exprimeraient linéairement à l'aide de $\sum \lambda + (2m - 1)(P - 1) - 1$ d'entre elles. Je vais démontrer que cette hypothèse est impossible.

En effet, nous avons vu dans le paragraphe précédent (pages 244 sq) que si toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce s'expriment linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles on pourrait construire une fonction

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{1-m} F(z)$$

$F(z)$ représentant une fonction fuchsienne de z admettant q infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Donc si l'hypothèse faite au début était possible, on pourrait construire une fonction $A(z)$ admettant $J' = \sum \lambda + (2m - 1)(P - 1)$ infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Le nombre J' ne satisferait pas alors à l'inégalité (9) ce qui est contraire à ce qu'on a vu plus haut.

En conséquence, toute expression de la forme (6) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1 de la 2^{de} espèce; donc toute expression de la forme (6) avec ou sans infinis, pourra se mettre sous la forme d'une série (4) § 1 de la 1^{ère} ou de la 2^{de} espèces.

Passons à une propriété importante des fonctions de la forme $A(z)$. Ces fonctions auront toujours une infinité d'infinis; soient $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots$ ces infinis, que nous supposerons tous simples pour fixer les idées, A_1, A_2, \dots, A_i , les résidus correspondants. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental. On aura identiquement:

$$A(z)\varphi(z) = \sum_i \frac{A_i \varphi(z_i)}{z - z_i}$$

Cela se démontre de la même manière que dans le paragraphe précédent; la première démonstration peut se répéter sans qu'on y change un mot; la seconde demanderait pour être appliquée quelques modifications légères.

Les divers termes du second membre de l'identité précédente peuvent être groupés d'une manière plus avantageuse. Soient en effet q le nombre des infinis distincts de $A(z)$; z_1, z_2, \dots, z_q ces infinis; A_1, A_2, \dots, A_q les résidus correspondants, nous pourrions écrire:

$$(10) \quad A(z)\varphi(z) = \sum_k A_k \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{\left(z - \frac{a_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2m}}$$

Dans cette formule on désigne par la notation $\left(z, \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ les diverses substitutions du groupe G . En différentiant la relation (10) $2m - 1$ fois par rapport à z , on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (16) du paragraphe précédent. Le premier membre est une expression de la forme (6) et le second membre est une série de la forme (4) § 1.

§ 7. 2^{me} Famille; genre 0.

Considérons un polygone R_0 dont les sommets, au nombre de $2n$, sont tous situés sur le cercle fondamental et dont les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Tous les angles de notre polygone sont donc formés par deux arcs de cercle tangents l'un à l'autre et par conséquent, il sont tous nuls. Je supposerai que les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués; les cycles seront alors au nombre de $n + 1$, dont deux formés d'un seul sommet, le premier du sommet de rang 1; le second du sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles seront formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$.

J'appelle S_p la substitution qui change le côté de rang p en celui de rang $2n + 1 - p$. Nous aurons ainsi n substitutions S_1, S_2, \dots, S_n qui seront les substitutions fondamentales de notre groupe G .

Je définis ensuite les substitutions $S'_2 \dots S'_n$ par les égalités suivantes :

$$S'_2 = S_2 S_1^{-1}, S'_3 = S_3 S_2^{-1}, \dots S'_n = S_n S_{n-1}^{-1}$$

et je pose pour plus de symétrie dans les notations :

$$S_1 = S'_1, S_{n+1} = S'_{n+1}$$

J'appelle maintenant α_i le sommet de rang i ; il est clair que α_i sera l'un des points doubles de S'_i . Je supposerai que *les $n+1$ substitutions $S'_1, S'_2, \dots, S'_{n+1}$ sont paraboliques.* Cela ne serait pas possible si les $2n$ points α_i étaient choisis arbitrairement sur le cercle fondamental. Il faut qu'il y ait entre eux la relation :

$$(1) \quad (a_2 - a_1)(a_4 - a_3) \dots (a_{2p} - a_{2p-1}) \dots (a_{2n} - a_{2n-1}) = \\ = (a_3 - a_2)(a_5 - a_4) \dots (a_{2p+1} - a_{2p}) \dots (a_1 - a_{2n})$$

Dans ces conditions notre polygone R_0 est du genre 0 et du 1^{er} ordre de la 2^{de} famille; notre groupe G et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent sont du genre 0 et de la 2^{de} famille. Nous pourrons, comme dans le § 5, choisir parmi ces fonctions fuchsiennes une d'entre elles que j'appellerai $x = f(z)$ et en fonction de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de la définir, je supposerai que l'on a :

$$f(a_1) = 0 \quad f(a_2) = 1 \quad f(a_{n+1}) = \infty$$

Je poserai en outre comme dans le § 5

$$a_i = f(a_i) = f(a_{2n+2-i})$$

d'où

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+1} = \infty$$

Si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

v satisfait à une équation linéaire :

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = r \zeta x$$

$\zeta(x)$ étant rationnel en x . Quelle est ici la forme de la fonction $\zeta(x)$? On trouve aisément:

$$\zeta(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^2}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ et $P(x)$ étant un polynôme entier de degré $2n - 2$. Le polynôme $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes:

$$P(a_i) = -\frac{1}{4} Q'(a_i)$$

et

$$\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\frac{1}{4}$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (3 bis). Il faut en outre assujettir $P(x)$ à $2n - 4$ conditions transcendantes.

Nous démontrerons dans un autre mémoire que l'on peut toujours choisir le groupe G de telle sorte que les nombres a_2, a_3, \dots, a_n aient des valeurs données quelconques.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique par rapport au cercle qui joint α_1 à α_{n+1} en coupant orthogonalement le cercle fondamental, les coefficients de la fonction rationnelle $\zeta(x)$ sont tous réels.

Si de plus $n = 2$; $f(z)$ se réduit à la fonction modulaire k^2 .

Voyons comment se comportent les intégrales de l'équation (3 bis) dans le voisinage de l'un des points singuliers a_1, a_2, \dots, a_n . Les intégrales seront *régulières et logarithmiques*, pour employer les expressions de M. FUCHS et de ses disciples. Les deux racines de l'équation déterminante seront $\frac{1}{2}$; de telle sorte que les intégrales pourront se mettre sous la forme:

$$v_1 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}} [P_i + Q_i \log (x - a_i)]$$

et

$$v_2 = (x - a_i)^{\frac{1}{2}} Q_i$$

P_i et Q_i étant des fonctions holomorphes en $x - a_i$ dont la 1^{re} s'annule et la 2^{me} ne s'annule pas pour $x = a_i$.

Pour $x = \infty$, on a de même:

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}}(P_{n+1} + Q_{n+1} \log x)v_2$$

P_{n+1} et Q_{n+1} étant des fonctions holomorphes en $\frac{1}{x}$, dont la première s'annule et la seconde ne s'annule pas pour $x = \infty$.

Exprimons maintenant dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, z en fonction de x . On devra avoir dans le voisinage de $x = a_i$:

$$z = \frac{\lambda Q_i + \mu[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}{\lambda' Q_i + \mu'[Q_i \log(x - a_i) + P_i]}$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant des constantes convenablement choisies. Supposons que la substitution S'_i s'écrive

$$\left(\frac{1}{z - a_i}, \frac{1}{z - a_i} + \beta_i \right)$$

et posons:

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{e^{(z-a_i)\beta_i}} = t_i$$

exprimons ensuite que z se réduit à a_i pour $x = a_i$ et subit la substitution S'_i quand $\log(x - a_i)$ se change en $\log(x - a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$. Nous verrons que la relation qui précède peut s'écrire:

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z - a_i)\beta_i} = P'_i + \log(x - a_i)$$

P'_i étant une fonction holomorphe en $x - a_i$. On tire de là:

$$t_i = e^{(x-a_i)\beta_i} = Q'_i$$

Q'_i étant une fonction holomorphe en $(x - a_i)$; le développement de Q'_i suivant les puissances de $(x - a_i)$ commence par un terme en $(x - a_i)$ dont le coefficient ne peut jamais être nul. On tire de là:

$$x = a_i + \Phi_i(t_i)$$

Φ_i désignant une fonction holomorphe en t_i et dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1^{er}

degré dont le coefficient n'est jamais nul. Telle est la forme de l'expression de x en fonction de z dans le voisinage du point singulier $x = a_i$. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, $x = \infty$, on aura :

$$\frac{1}{x} = \phi_{n+1}(t_{n+1})$$

ϕ_{n+1} désigne une fonction holomorphe en t_{n+1} et son développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du 1^{er} degré qui n'est jamais nul. On peut encore écrire la relation précédente sous la forme :

$$x = \frac{1}{t_{n+1}} \psi(t_{n+1})$$

ψ désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable. Quant à la dérivée $\frac{dx}{dz}$, elle pourra se mettre sous une forme analogue. Dans le voisinage de $z = \alpha_i$, on aura :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_i)^2} t_i \phi'_i(t_i)$$

ϕ'_i étant une fonction holomorphe de t_i qui ne s'annule pas avec cette variable. De même dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, on aura :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha_{n+1})^2} \frac{\psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}}$$

ψ' désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable.

Passons maintenant à l'étude des fonctions thétafuchsiennes.

Toute fonction représentée par une série de la forme (4) § 1 pourra toujours se mettre sous la forme suivante

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x)$$

F désignant une fonction rationnelle de x . Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet nous avons vu au § 2 que toute série de la forme (4) § 1, peut dans le voisinage de $z = \alpha_i$ se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{(z - a_i)^{2m}} R(t_i)$$

R désignant une fonction holomorphe de ι_i qui s'annule avec cette variable. Il en résulte que pour $x = a_i$, la fonction $(x - a_i)^m F(x)$ doit s'annuler et que quand x augmente indéfiniment, $x^m F(x)$ doit tendre vers 0. Telles sont les conditions *nécessaires* auxquelles doit satisfaire l'expression (2) pour pouvoir représenter une série de la forme (4) § 1.

Nous les appellerons les conditions \mathcal{A} .

Supposons maintenant que la fonction (2) n'admette pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. $F(x)$ devra être de la forme:

$$\frac{H(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

$H(x)$ désignant un polynôme entier en x . Mais à cause des conditions \mathcal{A} , les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont au plus égaux à $m - 1$ et le degré de $H(x)$ au plus égal à $n(m - 1) - m - 1$. Par conséquent toutes les séries thétafuchsiennes de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce s'expriment linéairement au moyen de $n(m - 1) - m$ d'entre elles.

Mais nous ne savons pas encore si toute expression de la forme (2) n'ayant pas d'infini et satisfaisant aux conditions \mathcal{A} peut se mettre sous la forme d'une série (4) § 1; ni par conséquent si toutes les séries de cette forme et de la 2^{de} espèce ne peuvent pas s'exprimer linéairement à l'aide de $n(m - 1) - m - 1$ d'entre elles.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, considérons une fonction de la forme:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{1-m} F(x)$$

F désignant une fonction rationnelle et cherchons quel est le minimum du nombre J' de ses infinis distincts, à supposer qu'elle tende vers 0 quand z tend vers α_i .

Nous pourrions écrire:

$$F(x) = \frac{(x - a_1)^{m-1} (x - a_2)^{m-1} \dots (x - a_n)^{m-1} H(x)}{\Phi(x)}$$

$H(x)$ et $\Phi(x)$ désignant deux polynômes en x . Pour que $A(z)$ tende vers 0 quand z tend vers α_i , il faut et il suffit que

$$\phi(a_1), \phi(a_2), \dots \phi(a_n)$$

ne soient pas nuls et que le degré du numérateur surpasse au plus de $m - 1$ celui du dénominateur. Or le degré de $\phi(x)$ est le nombre J' des infinis distincts de $A(z)$. On a donc :

$$J' \geq n(m - 1) - m + 1$$

Je dis alors qu'il est impossible d'exprimer linéairement toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce à l'aide de $n(m - 1) - m - 1$ d'entre elles; car, si cela avait lieu, on pourrait construire une fonction de la forme $A(z)$ ayant $n(m - 1) - m$ infinis distincts, ce qui ne se peut pas comme nous venons de le voir. On en conclura donc (comme dans les deux paragraphes précédents) que toute expression de la forme (2) satisfaisant aux conditions A peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1.

La formule (10) du paragraphe précédent s'applique aussi aux fonctions qui nous occupent. On la démontrerait comme dans les deux paragraphes précédents; la première démonstration demanderait quelques modifications légères, la seconde peut s'appliquer sans qu'on y change rien. Toutes les conséquences que nous avons déduites de cette formule (10) dans les deux paragraphes précédents, et entre autres la formule (16) du § 5, sont encore vraies dans le cas qui nous occupe.

On voit aisément comment on étendrait les principes qui précèdent aux fonctions de la 2^{de} et de la 6^{me} familles et de genre quelconque.

Nous pouvons donc passer à l'étude des fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan.

§ 8. 3^{me} Famille.

Parmi celles-ci les plus simples sont celles de la 3^{me} famille dont nous allons parler d'abord.

Supposons qu'on nous donne n paires de cercles $(c_1 \text{ et } c'_1), (c_2 \text{ et } c'_2), \dots (c_n \text{ et } c'_n)$.

Je suppose que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres, qu'ils coupent orthogonalement le cercle fondamental et soient par

conséquent symétriques par rapport à ce cercle. Je suppose que l'on considère n substitutions S_1, S_2, \dots, S_n , telles que S_i tout en conservant le cercle fondamental change c_i en c'_i . Le groupe dérivé des substitutions S_i sera un groupe fuchsien G dont le polygone générateur R_0 se composera de la partie du plan qui est intérieure au cercle fondamental et extérieure aux divers cercles c et c' . Le polygone R_0 aura $2n$ côtés de la 1^{re} sorte, formés par les arcs des cercles c et c' intérieurs au cercle fondamental et $2n$ côtés de la 2^{de} sorte formés par les arcs du cercle fondamental extérieurs aux différents cercles c et c' . Tous les sommets de R_0 sont de la 3^{me} catégorie. Quant au polygone R'_0 , symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental, ce sera la partie du plan qui est extérieure à la fois au cercle fondamental et aux cercles c et c' . Le groupe G et par conséquent les fonctions fuchsiennes qui en dérivent seront de la 3^{me} famille et du genre n .

Toutes ces fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique de genre n :

$$(1) \quad \phi(x, y) = 0$$

Si l'on pose de plus

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v satisfera à l'équation (3) du § 4, à savoir:

$$(3) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

φ étant rationnel en x et en y .

Le groupe G ne dépendant que de $3n - 3$ paramètres réels distincts, on ne peut en disposer de manière que la relation $\phi(x, y) = 0$ soit quelconque. Combien, en effet, reste-t-il de paramètres arbitraires dans une relation algébrique de genre n :

$$(1) \quad \phi(x, y) = 0$$

lorsqu'on convient de ne pas regarder comme distinctes de cette relation celles que l'on en déduit en y remplaçant x et y par des fonctions ration-

nelles de x' et de y' . On sait qu'il reste $3n - 3$ paramètres que l'on appelle les *modules* de la relation (1) et qui sont pour ainsi dire des invariants à l'égard de cette relation et des opérations qui consistent à y remplacer x et y par des fonctions rationnelles de x' et y' . En nous proposant d'obtenir entre nos deux fonctions fuchsiennes x et y une relation algébrique *donnée*, nous nous imposons donc $3n - 3$ conditions *complexes* qui équivalent à $6n - 6$ conditions *réelles*. Ce nombre surpasse de $3n - 3$ celui des paramètres dont nous disposons. Ainsi le premier membre de la relation (1) est assujéti à $3n - 3$ conditions réelles, il est aisé de les trouver.

En effet, on peut supposer que l'on fasse une opération qui consiste à changer z en son symétrique par rapport au cercle fondamental. Cela revient à changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ et à faire ensuite un changement linéaire de variable. On change ainsi R_0 en R'_0 et réciproquement de sorte que le groupe G et le système des fonctions fuchsiennes qui en dérivent ne changent pas. Les $3n - 3$ modules de la relation (1) ne changent donc pas non plus. Mais quand on a changé $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, ces modules ont dû se changer en leurs imaginaires conjugués; puis, quand on a fait un changement linéaire de variable, ils n'ont pas changé. Par conséquent les $3n - 3$ modules de la relation (1) ne diffèrent pas de leurs imaginaires conjugués, ils sont donc réels.

Il en résulte qu'on pourra toujours choisir x et y parmi les fonctions fuchsiennes dérivées du groupe G de telle sorte que *tous les coefficients de la relation (1) soient réels*. Alors les coefficients de $\varphi(x, y)$ seront aussi tous réels.

Je suppose de plus que l'on ait choisi x et y , ce qui est toujours possible, de façon que la relation (1) satisfasse aux conditions que nous avons imposées à la relation (1) du § 6, au commencement de ce paragraphe (page 255).

Cela posé, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfera aux conditions suivantes:

1° Quand x devient infiniment grand du 1^{er} ordre, elle devient infiniment petite du 4^e ordre.

2° Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ seront les points singuliers de la fonction y de x , définie par la relation (1) en n'y comprenant pas les points doubles de la courbe algébrique $\phi(x, y) = 0$. Si l'un de ces points est $x = a, y = b$, on aura:

$$\lim. (y - b)^2 \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

pour $x = a, y = b$.

Ces conditions qui, on le remarquera, sont les mêmes que celles que nous avons trouvées dans le premier exemple, examiné au § 6, ne suffisent pas pour déterminer la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$. Celle-ci est en outre assujettie à n conditions transcendantes. Voici sous quelle forme on peut présenter ces conditions transcendantes:

La fonction $\varphi(x, y)$ devra être choisie de telle sorte qu'en faisant décrire au point analytique (x, y) n cycles convenablement choisis (correspondant à n périodes convenablement choisies d'une intégrale abélienne de 1^{ère} espèce $\int g(x, y) dx$) on voie revenir les intégrales de l'équation (3) à leurs valeurs initiales.

Passons maintenant à l'étude des séries thétafuchsiennes:

$$\theta(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

c'est à dire à l'étude des séries de la forme (4) § 1, et d'abord cherchons comment il peut arriver que la fonction définie par cette série ne présente aucun infini en dehors des points singuliers essentiels.

En général la série $\theta(z)$ admet comme infinis, ainsi qu'on l'a vu au § 3: 1° les points correspondants du point ∞ , c'est à dire les points

$$z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$$

2° les infinis de la fonction $H(z)$ et les points correspondants.

Supposons pour fixer les idées que la fonction $H(z)$ ne devienne infinie pour aucun des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Quelle est d'abord la condition pour que les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ ne soient pas des infinis de $\theta(z)$? Pour cela, il faut et il suffit que le degré du dénominateur de la fonction rationnelle $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur.

Considérons maintenant un infini a de la fonction $H(z)$ elle-même. Dans la série $\theta(z)$, le terme

$$H(z)$$

(correspondant à $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 1$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, c'est à dire à la substitution unité) deviendra infini pour $z = a$. Pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$, il faut donc qu'un autre terme de cette série devienne infini, de façon que la somme de ces deux termes (qui séparément croissent indéfiniment quand z tend vers a) tende au contraire vers une limite finie. Il faut pour cela que parmi les infinis de $H(z)$ il y en ait un autre $z = b$, tel que:

$$b = \frac{a\alpha + \beta}{\gamma a + \delta}$$

$\left(z, \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étant une des substitutions du groupe G . Il est clair alors que le terme:

$$H\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

deviendra infini pour $z = a$. Mais il faut que la somme de ce terme et du terme $H(z)$ reste finie pour $z = a$. Soient donc A et B les résidus de $H(z)$ qui correspondent à $z = a$ et $z = b$. On aura:

$$H(z) = \frac{A}{z - a} + H'(z)$$

$$H\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{B}{z - a}(\gamma a + \delta)^{2-2m} + H_1(z)$$

$H'(z)$ et $H_1(z)$ étant des fonctions rationnelles de z qui restent finies pour $z = a$. On devra donc avoir:

$$A + B(\gamma a + \delta)^{2-2m} = 0$$

Telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\theta(z)$ reste fini pour $z = a$ et par conséquent aussi pour les points correspondants.

Cela posé, voici comment il faudra s'y prendre pour construire une fonction $\theta(z)$ qui n'admette aucun infini. Prenons une fonction rationnelle $H(z)$ admettant $2p$ infinis $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_p, b_p$, et ayant pour résidus correspondants $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots, A_p, B_p$.

Je suppose de plus que l'on ait:

$$b_1 = \frac{a_1 a_1 + \beta_1}{\gamma_1 a_1 + \delta_1}, \quad b_2 = \frac{a_2 a_2 + \beta_2}{\gamma_2 a_2 + \delta_2}, \quad \dots, \quad b_p = \frac{a_p a_p + \beta_p}{\gamma_p a_p + \delta_p}$$

$$\left(z, \frac{a_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} \right), \quad \left(z, \frac{a_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2} \right), \quad \dots, \quad \left(z, \frac{a_p z + \beta_p}{\gamma_p z + \delta_p} \right)$$

étant p substitutions du groupe G . J'assujettis de plus les $2p$ résidus à deux systèmes de conditions. D'abord:

$$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \dots + A_p + B_p = 0$$

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + A_2 a_2 + B_2 b_2 + \dots + A_p a_p + B_p b_p = 0$$

$$A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + \dots + A_p a_p^2 + B_p b_p^2 = 0$$

$$\dots$$

$$A_1 a_1^{2m-2} + B_1 b_1^{2m-2} + \dots + A_p a_p^{2m-2} + B_p b_p^{2m-2} = 0,$$

pour que le degré du dénominateur de $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur. Ensuite:

$$A_k + B_k(\gamma_k a_k + \delta_k)^{2-2m} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

pour que a_k et b_k ne soient pas des infinis de $\theta(z)$.

Ces $p + 2m - 1$ conditions seront compatibles pourvu que:

$$p > 2m - 1$$

et si elles sont remplies, la série $\theta(z)$ formée à l'aide de la fonction rationnelle

$$H(z) = \sum_{k=1}^{k=p} \left[\frac{A_k}{z - a_k} + \frac{B_k}{z - b_k} \right]$$

n'aura aucun infini. Je dirai alors qu'elle est de la 2^{de} espèce, de sorte que nous avons ici, comme dans les trois paragraphes précédents, la distinction entre les deux espèces de séries thétafuchsiennes.

$2m - p$. Dans ces conditions le point $z = \infty$ n'est pas un infini de notre fonction $\theta_p(z)$, c'est pour elle un zéro d'ordre p .

Je suppose que:

$$\lim. z^p \theta_p(z) = 1 \quad \text{pour } z = \infty$$

$$\lim. z^{2m-1-p} [z^p \theta_p(z) - 1] = 0 \quad \text{pour } z = \infty$$

Ces conditions ne suffisent pas pour définir complètement la fonction $\theta(z)$, car si $\theta(z)$ est une série de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce, $\theta_p(z) + \theta(z)$ y satisfera comme $\theta_p(z)$. Mais nous choisirons pour notre fonction $\theta_p(z)$ une quelconque des séries de la forme (4) § 1, qui satisfont aux conditions énoncées.

Considérons une série quelconque de la forme (4) § 1 et de la 1^{re} espèce.

$$\eta(z) = \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

Supposons que la partie entière de la fonction rationnelle

$$z^{2m} H(z)$$

se réduise à:

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_{2m} z^{2m}$$

on verra aisément que le point $z = \infty$ est pour la fonction théta-fuchsienne

$$\psi(z) = B_0 \theta_0(z) + B_1 \theta_1(z) + B_2 \theta_2(z) + \dots + B_{2m} \theta_{2m}(z)$$

un zéro d'ordre $2m$ au moins et par conséquent que cette fonction théta-fuchsienne ne devient pas infinie pour $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

Cela posé, envisageons la fonction suivante

$$\phi(z, a) = \sum_i \frac{1}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}$$

Considérée comme fonction de z , elle n'a d'autres infinis que les points

$$z = \frac{\alpha_i \alpha + \beta_i}{\gamma_i \alpha + \delta_i}$$

c'est à dire les points correspondants de a .

Considérée comme fonction de a , c'est une série thétafuchsienne et elle admet comme infinis:

1° les points $a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, c'est à dire les points correspondants de z .

2° les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, c'est à dire les points correspondants de $a = \infty$. Ces points sont des infinis d'ordre $2m - 1$. Quant au point $a = \infty$ lui-même, c'est pour notre série un zéro du premier ordre.

Cherchons la partie entière de la fonction rationnelle

$$\frac{a^{2m}}{z - a}$$

nous trouverons:

$$- (a^{2m-1} + za^{2m-2} + z^2a^{2m-3} + \dots + z^{2m-2}a + z^{2m-1})$$

On en conclut que la fonction thétafuchsienne:

$$\Omega(z, a) = \phi(z, a) + z^{2m-1}\theta_0(a) + z^{2m-2}\theta_1(a) + \dots + z\theta_{2m-2}(a) + \theta_{2m-1}(a)$$

n'admet pas comme infinis les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

En conséquence elle n'aura d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

le résidu correspondant sera:

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque de notre groupe G .

La fonction:

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

sera comme $\Omega(z, a)$ une fonction thétafuchsienne de a ; elle n'admettra comme elle d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et avec les mêmes résidus; donc, on pourra écrire:

$$(6) \quad (\gamma z + \delta)^{2m-2} \Omega\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - \Omega(z, a) = \theta(a)$$

$\theta(a)$ désignant une fonction thétafuchsienne de a , susceptible d'être mise sous la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce. Posons maintenant:

$$(7) \quad A(z) = A_1 \Omega(z, z_1) + A_2 \Omega(z, z_2) + \dots + A_q \Omega(z, z_q)$$

En rapprochant les équations (5), (6) et (7) on trouve aisément l'identité suivante:

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} A\left(\frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = A(z)$$

qui a lieu pour toutes les substitutions $\left(z, \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ du groupe G . Il suit de là que $A(z)$ peut se mettre sous la forme:

$$(8) \quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y . Or la fonction $A(z)$ admet q infinis distincts z_1, z_2, \dots, z_q , qui ont été choisis au hasard, et n'en admet pas d'autre à distance finie. On pourrait donc construire une fonction de la forme (8) admettant q infinis *donnés* et n'en admettant pas d'autre. Or nous avons vu au § 6 que cela était impossible. Donc l'hypothèse faite au début était absurde.

On en conclut comme dans les trois paragraphes précédents:

1° que toutes les séries de la forme (4) § 1 et de la 2^{de} espèce ne peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q - 1$ d'entre elles.

2° que toute expression de la forme (2) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme (4) § 1.

3° que toute expression de la forme (2) peut être exprimée par une série de la forme (4) § 1 (pourvu que $m > 1$).

4° que toute fonction fuchsienne peut être égale d'une infinité de manières au quotient de deux séries de la forme (4) § 1.

Considérons la fonction:

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz} \right)^{1-m} F(x, y)$$

Supposons qu'elle admette une infinité d'infinis $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ avec les résidus $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$. Supposons de plus que l'on ait:

$$A(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \dots + B_1 z + A_1(z)$$

$A_1(z)$ tendant vers une limite finie quand z croît indéfiniment. On aura identiquement:

$$(9) \quad A(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \dots + B_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - z_k}$$

Cette identité se démontre de deux manières comme l'identité correspondante du § 5.

Un cas particulier bien remarquable est celui de $n = 1$.

Dans ce cas les substitutions du groupe G se réduisent à:

$$\left(\frac{az + b}{cz + d}, K^p \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

a, b, c, d étant des constantes, K étant un nombre réel positif et plus grand que 1, et l'exposant p pouvant prendre dans les diverses substitutions toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Voici comment on peut former les fonctions fuchiennes dans le cas qui nous occupe. Soit $f(\xi)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $2i\pi$ et $\log K$. La transcendante $f\left[\log\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)\right]$ sera alors une fonction fuchsienne.

Posons par exemple :

$$x = \operatorname{sn} \left(\log \frac{az + b}{cz + d} \right), \quad y = \operatorname{cn} \left(\log \frac{az + b}{cz + d} \right) \operatorname{dn} \left(\log \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

Les expressions de la forme

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dz} \right)^m F(x, y)$$

pourront s'écrire :

$$(10) \quad \frac{f \left(\log \frac{az + b}{cz + d} \right)}{(az + b)^m (cz + d)^m}$$

$f(\xi)$ désignant toujours une fonction doublement périodique.

Les séries $\theta(z)$ de la forme (4) § 1 deviendront d'autre part :

$$(11) \quad \sum_i \frac{K^{mi} \varphi \left(K^i \frac{az + b}{cz + d} \right)}{(cz + d)^{2m}}$$

φ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Egalons les expressions (10) et (11) et faisons y :

$$\frac{az + b}{cz + d} = e^{\xi}$$

il viendra :

$$f(\xi) = \sum_i K^{mi} e^{m\xi} \varphi(K^i e^{\xi})$$

On obtient ainsi le développement d'une fonction doublement périodique de ξ suivant une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de e^{ξ} . Si au lieu de ξ , on avait pris pour variable indépendante $\eta = \xi \sqrt{-1}$, le premier membre serait une fonction doublement périodique de η , et dans la série du second membre, tous les termes seraient des fonctions rationnelles de $\sin \eta$ et $\cos \eta$. Nous retrouvons par une voie détournée un résultat auquel JACOBI est parvenu directement et d'où il a tiré tant de belles conséquences.

Voyons maintenant ce que devient la formule (9) dans le cas particulier qui nous occupe.

On a :

$$A(z) = (az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}f(\xi)$$

$f(\xi)$ étant toujours une fonction doublement périodique.

On a d'autre part dans le second membre :

1° un polynôme du degré h en z ; mais il est aisé de voir que dans le cas général, c'est à dire à moins que :

$$f\left(\log \frac{a}{c}\right) = \infty$$

le degré h ne peut dépasser $2m - 2$. On peut donc le regarder comme un polynôme homogène de degré $2m - 2$ en $(az + b)$ et $(cz + d)$. Si on le divise par $(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1}$, il prendra la forme suivante :

$$P_{m-1}(e^{\xi}) + P'_{m-1}(e^{-\xi})$$

P_{m-1} et P'_{m-1} désignant des polynômes de degré $m - 1$ en e^{ξ} et en $e^{-\xi}$.

2° Un ensemble de termes $\sum \frac{A_k}{z - z_k}$ que l'on peut grouper de la façon suivante; soient z_1, z_2, \dots, z_q les q infinis distincts de $A(z)$ et supposons qu'il n'y en ait pas d'autre; soient A_1, A_2, \dots, A_q les résidus correspondants; soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ les valeurs correspondantes de ξ . Groupons ensemble tous les termes de la forme $\frac{A_k}{z - z_k}$ qui correspondent à des infinis qui ne sont pas distincts de $z = z_p$. Leur somme sera :

$$A_p \sum_i \frac{ce^{\xi} - a}{(cK^i e^{\xi_p} - a)^{2m-1}} \frac{K^{im}}{e^{\xi} - K^i e^{\xi_p}} (ce^{\xi_p} - a)^{2m}$$

Comme on a d'autre part :

$$(az + b)^{m-1}(cz + d)^{m-1} = e^{(m-1)\xi}(ce^{\xi} - a)^{2-2m}$$

on trouvera pour la fonction doublement périodique $f(\xi)$ l'expression suivante

$$f(\tilde{z}) = P_{m-1}(e^{\tilde{z}}) + P'_{m-1}(e^{\tilde{z}}) + \\ + \sum_{p=1}^{p=q} \left[A_p (ce^{\tilde{z}^p} - a)^{2m} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\frac{ce^{\tilde{z}} - a}{cK^i e^{\tilde{z}^p} - a} \right)^{2m-1} \frac{K^{mi} e^{(1-m)\tilde{z}}}{e^{\tilde{z}} - K^i e^{\tilde{z}^p}} \right]$$

§ 9. 5^{me} Famille; genre 0.

Je crois inutile de multiplier davantage les exemples. Ceux que j'ai étudiés jusqu'ici suffisent en effet pour faire voir comment on doit appliquer les principes généraux à chaque cas particulier.

Je veux cependant, sans traiter complètement les questions qui les concernent, dire quelques mots de certaines fonctions remarquables de la 5^{me} famille.

Considérons un polygone R_0 limité de la façon suivante: Il aura $2n$ côtés de la 1^{ère} sorte et 1 côté de la 2^{de} sorte; je suppose que ses sommets soient en suivant le périmètre dans le sens positif $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n}$. Je suppose que le côté $\alpha_n \alpha_{n+1}$ soit de la 2^{de} sorte et les autres de la 1^{ère} sorte, de telle façon que les côtés $\alpha_0 \alpha_1$ et $\alpha_0 \alpha_{2n}$, $\alpha_1 \alpha_2$ et $\alpha_{2n} \alpha_{2n-1}$, $\alpha_2 \alpha_3$ et $\alpha_{2n-1} \alpha_{2n-2}$, $\dots, \alpha_{p+1} \alpha_{p+2}$ et $\alpha_{2n-p} \alpha_{2n-p-1}$, \dots et enfin $\alpha_{n-1} \alpha_n$ et $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$, soient conjugués et par conséquent congruents. Si on laisse de côté α_n et α_{n+1} , tous les sommets seront de la 1^{ère} catégorie et se répartiront en n cycles fermés. L'un des cycles ne comprendra que le sommet α_0 ; les autres seront formés respectivement des sommets α_1 et α_{2n} , α_2 et α_{2n-1} , α_3 et α_{2n-2} , \dots enfin α_{n-1} et α_{n+2} ; de sorte que les angles curvilignes $\alpha_0, \alpha_1 + \alpha_{2n}, \alpha_2 + \alpha_{2n-1}, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_{n+2}$ devront être des parties aliquotes de 2π . Quant aux angles α_n et α_{n+1} , ils seront forcément droits puisque les côtés de la 1^{ère} sorte $\alpha_{n-1} \alpha_n$ et $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$ coupent orthogonalement le cercle fondamental, dont le côté $\alpha_n \alpha_{n+1}$ n'est qu'un arc. Nous construirons ensuite un polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. J'appellerai α'_i le sommet de R'_0 qui est symétrique de α_i par rapport au cercle fondamental.

On voit aisément que le polygone R_0 est de la 5^{me} famille et du genre 0, et qu'on peut s'en servir pour définir un groupe fuchsien et

une infinité de fonctions fuchsiennes. Celles-ci peuvent toutes s'exprimer rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai :

$$x = f(z)$$

Comme on peut choisir d'une infinité de manières parmi nos fonctions fuchsiennes une d'entre elles à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement, la fonction $x = f(z)$ ne serait pas complètement déterminée si nous n'ajoutions quelques conditions de plus.

Soient β et γ deux points du côté de la 2^{de} sorte $\alpha_n \alpha_{n+1}$; je supposerai que l'on a :

$$f(\alpha_n) = f(\alpha_{n+1}) = 0 \qquad f(\beta) = 1 \qquad f(\gamma) = \infty.$$

Je poserai ensuite :

$$f(a_i) = a_i \qquad f(a'_i) = a'_i$$

Le polygone $R_0 + R'_0$ étant symétrique par rapport au cercle fondamental, on peut voir par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent que les nombres a_i et a'_i sont imaginaires conjugués.

Posons maintenant

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

la fonction v satisfera à une équation différentielle de la forme (3 bis) § 4 puisque le groupe fuchsien correspondant est de genre 0. Cette équation, comme on le voit aisément, peut s'écrire :

$$(3 \text{ bis}) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v \frac{P(x)}{[Q(x)]^2}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x - a_0) (x - a'_0) (x - a_1) (x - a'_1) \dots \dots \dots (x - a_{n-1}) (x - a'_{n-1})$ et $P(x)$ étant un polynôme de degré $4n - 4$ en x , ayant tous ses coefficients réels.

§ 10. *Résumé.*

En étudiant les exemples précédents, j'ai rencontré différents résultats qui sont communs à toutes les fonctions fuchsiennes. Je ne crois pas utile d'en donner la démonstration dans le cas le plus général; car elle ne différerait pas de celles que nous avons données dans les divers cas particuliers et je serais entraîné à des redites sans intérêt. Je me bornerai donc à les énoncer ici sous forme de résumé.

Formons avec une fonction rationnelle quelconque $H(z)$ la série thétafuchsienne

$$(1) \quad \sum_i H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \theta[z, H(z)]$$

Cette série pourra toujours se mettre sous la forme

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de ces deux fonctions fuchsiennes x et y , à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et entre lesquelles il y a une relation algébrique:

$$(3) \quad \phi(x, y) = 0$$

Pour qu'une expression de la forme (2) puisse se mettre sous la forme (1), il faut qu'elle s'annule quand z vient en un des sommets de la 2^{de} catégorie du polygone R_0 .

A cette condition, toute expression de la forme (2) peut se mettre sous la forme (1) pourvu que m soit un entier plus grand que 1.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux séries telles que (1).

Les séries de la forme (1) sont de deux espèces: celles qui ont des infinis et celles qui n'en ont pas. Ces dernières peuvent s'exprimer linéaire-

ment à l'aide d'un nombre fini d'entre elles. Il y a donc entre les séries thétafuchsiennes de la 2^{me} espèce une infinité de relations linéaires.

Voici une de ces relations qui peut servir de point de départ pour trouver, sinon toutes les autres, au moins un grand nombre d'entre elles.

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G . On aura identiquement :

$$\theta(z, H(z)) = \theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}\right]$$

Considérons maintenant une fonction de la forme suivante :

$$A(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y)$$

$F(x, y)$ désignant toujours une fonction rationnelle et m un entier plus grand que 1. Je suppose de plus que cette fonction s'annule quand z vient en un des sommets de la 2^{de} catégorie de R_0 .

Soit q le nombre des infinis distincts de $A(z)$; soient z_1, z_2, \dots, z_q ces infinis distincts; A_1, A_2, \dots, A_q les résidus correspondants; soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental.

On aura identiquement :

$$(4) \quad A(z)\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k \varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m}$$

si les fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et

$$(4 \text{ bis}) \quad A(z) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2m} + P(z)$$

($P(z)$ étant un polynôme entier en z) si les fonctions fuchsiennes existent dans tout le plan.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut d'une infinité de manières se mettre sous la forme du quotient de deux séries telles que (4) ou (4 bis).

§ 11. *Historique.*

Si on laisse de côté les fonctions doublement périodiques, les premières fonctions fuchsiennes qui aient été signalées sont les fonctions modulaires. Elles se présentaient pour ainsi dire d'elles-mêmes dans l'étude des transcendentes elliptiques, et leurs propriétés principales, en particulier celles d'être uniformes et d'admettre une ligne singulière essentielle, ont été remarquées depuis longtemps. D'ailleurs les travaux dont elles ont été l'objet et les résultats remarquables obtenus dans ces derniers temps par MM. HERMITE, DEDEKIND, FUCHS et KLEIN sont trop connus pour que j'aie besoin d'insister.

Mais il est une autre catégorie de fonctions fuchsiennes dont l'existence a été signalée dès 1872. Ce sont celles auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de GAUSS; ces fonctions ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons étudiées dans le § 5 et on les obtient quand le polygone R_0 considéré dans ce paragraphe est symétrique et se réduit à un quadrilatère.

Dans un mémoire inséré au Tome 75 du Journal de Borchardt, M. SCHWARZ annonce sans démonstration que ces fonctions sont uniformes et admettent un cercle comme ligne singulière essentielle. C'était du même coup annoncer la discontinuité du groupe correspondant, comme je l'ai déjà fait remarquer dans l'historique du mémoire sur les groupes fuchsien. Malheureusement, détourné de ce sujet par d'autres études, M. SCHWARZ s'est borné aux quelques lignes qu'il avait consacrées à ces transcendentes et n'a pas poussé plus loin ses recherches.

Dans un autre ordre d'idées, M. SCHWARZ avait obtenu d'autres résultats qui se rapportent indirectement à notre sujet. Dans divers mémoires insérés aux Tomes 70 et 74 du Journal de Borchardt et aux Monatsberichte de l'Académie de Berlin, M. SCHWARZ a démontré d'une manière rigoureuse le principe dit de DIRICHLET et la possibilité de l'*Abbildung* du cercle sur une figure plane quelconque et en particulier sur

un polygone limité par des arcs de cercle. S'il avait connu les conditions de discontinuité des groupes, il aurait pu être conduit ainsi à démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique.

J'aurais donc pu me servir de ces résultats, mais j'ai préféré suivre une autre voie:

1° parce que je n'aurais pu démontrer ainsi l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas, où le polygone R_0 n'est pas symétrique.

2° parce que les développements en séries dont j'ai fait usage me donnaient non seulement la démonstration de l'existence de la fonction, mais son expression analytique.

Paris 23 Octobre 1882.

NOTE SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

On a d'après M. HEINE:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int z^{a-1} e^z dz$$

L'intégration étant faite le long d'un contour qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, le contour pouvant ne pas être fermé. Prenons pour contour deux droites inclinées d'un angle α passant par l'origine et un petit cercle autour de l'origine. L'intégrale le long du petit cercle est nulle pour a ayant une partie réelle comprise entre 0 et 1. L'intégration le long des deux droites donne

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cos \alpha} \sin(\rho \sin \alpha + a\alpha) d\rho$$

qui peut aussi se mettre sous la forme

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi (\sin \alpha)^a} \int_0^\infty \rho^{a-1} e^{\rho \cot \alpha} \sin(\rho + a\alpha) d\rho$$

Cette formule est vraie pour toute valeur de $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Si on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\sin a\pi} \int_0^{\infty} \rho^{a-1} \sin \left(\rho + \frac{a\pi}{2} \right) d\rho;$$

si on fait $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, elle devient

$$\Gamma(a) = \frac{(\sqrt{2})^a}{\sin a\pi} \int_0^{\infty} \rho^{a-1} e^{-\rho} \sin \left(\rho + \frac{3a\pi}{4} \right) d\rho$$

si on fait $\alpha = \pi$, elle devient

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} \rho^{a-1} e^{-\rho} d\rho.$$

SUR UNE CLASSE DE GROUPES DISCONTINUS DE
SUBSTITUTIONS LINÉAIRES ET SUR LES FONCTIONS
DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES RESTANT
INVARIABLES PAR CES SUBSTITUTIONS

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

La théorie des fonctions elliptiques a donné le premier exemple d'une fonction uniforme d'une variable ne changeant pas pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires non permutables faites sur cette variable: je veux parler de la fonction modulaire, c'est à dire du module considéré comme fonction du rapport des périodes, fonction étudiée, comme on sait, pour la première fois par M. HERMITE; des fonctions d'une variable se reproduisant pour un groupe d'une infinité de substitutions linéaires, ont été depuis l'objet de divers travaux, et, dans des recherches récentes, M. POINCARÉ a traité cette question dans toute sa généralité, en développant son admirable théorie des fonctions fuchsiennes.

Je me suis depuis longtemps proposé le problème de la recherche de fonctions de deux variables indépendantes qui puissent être considérées comme les analogues des fonctions elliptiques modulaires. On reconnaît facilement que la théorie des fonctions abéliennes n'est pas susceptible, d'une manière générale, de conduire à des fonctions de plusieurs variables entièrement analogues aux fonctions modulaires. Prend-on, par exemple, les fonctions abéliennes du premier genre: elles conduisent à un système de trois modules, fonctions de trois variables indépendantes, dont les

propriétés ont été étudiées par M. HERMITE dans ses belles recherches sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus, 1855). Ces fonctions se reproduisent bien pour un groupe d'une infinité de substitutions faites sur les variables; mais ici ces substitutions ne sont plus linéaires. Ainsi donc, laissant nécessairement de deux côtés le cas de deux variables, on passe immédiatement à des fonctions de trois variables, et la forme linéaire des substitutions a disparu. C'est en étudiant un cas particulier des fonctions abéliennes du second genre (correspondant à $p = 3$) que j'ai trouvé l'extension cherchée. L'étude du groupe discontinu particulier correspondant à ces nouvelles fonctions m'a conduit à une classe étendue de groupes linéaires discontinus pour le cas de deux variables; c'est à l'étude de ces groupes qu'est consacrée cette première étude où je montre aussi qu'il existe des fonctions de deux variables que les substitutions de ces groupes laissent invariables. Dans un autre travail je reviendrai particulièrement sur les fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires; j'espère pouvoir montrer ensuite que tous ces résultats sont encore susceptibles de généralisations fort étendues, et indiquer l'intérêt que peut présenter la considération des fonctions de cette nature tant pour la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes que pour l'étude des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles.

1. Dans un de ses mémoires sur les formes quadratiques, M. HERMITE a étendu la théorie des formes quadratiques binaires, en étudiant les expressions

$$axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cy_0y_0$$

les variables x et y sont des quantités complexes dont x_0 et y_0 représentent les conjuguées; les coefficients extrêmes a et c sont réels et les coefficients b et b_0 sont des quantités imaginaires conjuguées.

Nous allons considérer ici une forme quadratique ternaire analogue:

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y$$

les coefficients a, a', a'' étant réels et les autres coefficients étant deux à deux conjugués.

Effectuons sur les variables x, y, z la substitution linéaire

$$\begin{aligned}x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z\end{aligned}$$

en effectuant en même temps sur x_0, y_0, z_0 la substitution aux coefficients conjugués

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0 + \gamma_0 Z_0 \\y_0 &= \alpha'_0 X_0 + \beta'_0 Y_0 + \gamma'_0 Z_0 \\z_0 &= \alpha''_0 X_0 + \beta''_0 Y_0 + \gamma''_0 Z_0\end{aligned}$$

on voit de suite que cette substitution conduit à une transformée de forme toute semblable:

$$A XX_0 + A' YY_0 + A'' ZZ_0 + B YZ_0 + B_0 Y_0 Z + B' ZX_0 + B'_0 Z_0 X + B'' XY_0 + B''_0 X_0 Y$$

De plus si on pose:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}$$

et soit Δ la transformée de δ quand on y remplace les petites lettres par les grandes on aura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha'_0 & \beta'_0 & \gamma'_0 \\ \alpha''_0 & \beta''_0 & \gamma''_0 \end{vmatrix} \times \delta$$

Par conséquent l'expression δ jouera ici le rôle d'invariant.

La forme f peut être mise sous une forme particulière. Posons en effet

$$\begin{aligned}ax + b''_0 y + b'z &= u \\(aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z &= v \\z &= w\end{aligned}$$

On aura, comme on le reconnaît immédiatement

$$(1) \quad f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{a(aa' - b''b''_0)} [vv_0 + (aa' - b''b''_0)uw_0 + a\delta \cdot ww_0]$$

Nous supposons, bien entendu, que a et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls. Les divers coefficients a , $aa' - b''b''_0$ et δ sont réels. Cette formule, dans le cas où les coefficients et les variables sont réels, donne évidemment la décomposition de la forme quadratique en une somme de carrés. Cette décomposition de la forme f en une somme de termes de la forme εuu_0 peut toujours se faire d'ailleurs quand l'invariant δ n'est pas nul et cela de telle manière que u , v et w sont linéairement indépendants; c'est un point entièrement élémentaire sur lequel nous n'insisterons pas et nous garderons la forme précédente en supposant que a et $aa' - b''b''_0$ ne sont pas nuls.

Si $aa' - b''b''_0$ et $a \cdot \delta$ sont positifs, la quantité entre parenthèses sera une somme de quantités positives et la forme f aura par suite un signe invariable: elle sera définie. Dans tous les autres cas la forme sera indéfinie c'est à dire qu'elle sera susceptible de changer de signe.

2. Nous allons supposer maintenant que les coefficients de la forme f sont des nombres entiers; les coefficients a , a' , a'' seront nécessairement des entiers réels, quant aux coefficients b , b' , b'' ce sont des entiers complexes formés soit avec les racines de l'équation $\alpha^2 + 1 = 0$, soit avec celles de l'équation $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, c'est à dire les racines cubiques imaginaires de l'unité, soit d'une manière plus générale avec les racines de l'équation du second degré:

$$\lambda\alpha^2 + \mu\alpha + \nu = 0$$

où λ , μ et ν sont des entiers réels pour lesquels on a:

$$\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$$

Supposons qu'une substitution:

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned} \quad (2)$$

à coefficients entiers de la même nature que b , b' et b'' transforme en elle-même la forme f ; on en déduit immédiatement une substitution pour u , v , w qui transforme en elle-même la forme:

$$vv_0 + luv_0 + a\delta ww_0 \quad (\text{en posant } l = aa' - b''b''_0)$$

Il suffit pour l'obtenir d'ajouter aux équations (2) le système:

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= ax + b''_0 y + b'z & U &= aX + b''_0 Y + b'Z \\ v &= (aa' - b''b''_0)y + (ab_0 - b'b'')z & V &= (aa' - b''b''_0)Y + (ab_0 - b'b'')Z \\ w &= z & W &= Z \end{aligned}$$

Les équations (2) et (3) permettent d'exprimer u , v et w linéairement en U , V et W . Il importe d'examiner quelle sera la nature des coefficients de cette substitution; ce ne seront plus des entiers, mais en remarquant que le déterminant de la substitution (2) doit nécessairement avoir l'unité pour module, nous voyons que u , v et w s'exprimeront en fonction linéaire de X , Y et Z les coefficients étant entiers. D'ailleurs si on exprime X , Y et Z en fonction de U , V et W les coefficients seront des nombres fractionnaires dont le dénominateur sera un diviseur de al .

Nous avons donc une substitution:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= M_1 U + P_1 V + R_1 W, \\ v &= M_2 U + P_2 V + R_2 W, \\ w &= M_3 U + P_3 V + R_3 W, \end{aligned}$$

les coefficients étant des fractions dont le dénominateur divise al .

3. Écrivons d'une manière générale la forme en u , v et w de la manière suivante:

$$\alpha uu_0 + \beta vv_0 + \gamma ww_0$$

où α , β et γ sont des entiers réels dont aucun n'est nul. Les substitutions (4) transformant cette expression en elle-même, on aura les relations:

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha M_1 \mu_1 + \beta M_2 \mu_2 + \gamma M_3 \mu_3 &= \alpha \\ \alpha P_1 \pi_1 + \beta P_2 \pi_2 + \gamma P_3 \pi_3 &= \beta \\ \alpha R_1 \rho_1 + \beta R_2 \rho_2 + \gamma R_3 \rho_3 &= \gamma \\ \alpha P_1 \mu_1 + \beta P_2 \mu_2 + \gamma P_3 \mu_3 &= 0 \\ \alpha M_1 \rho_1 + \beta M_2 \rho_2 + \gamma M_3 \rho_3 &= 0 \\ \alpha P_1 \rho_1 + \beta P_2 \rho_2 + \gamma P_3 \rho_3 &= 0 \end{aligned}$$

où les lettres grecques désignent les conjuguées des grandes lettres cor-

respondantes. En tenant compte des relations (5) les équations (4) se résolvent immédiatement par rapport à U , V et W ; on trouve ainsi

$$Ua = a\mu_1 u + \beta\mu_2 v + \gamma\mu_3 w$$

$$V\beta = a\pi_1 u + \beta\pi_2 v + \gamma\pi_3 w$$

$$W\gamma = a\rho_1 u + \beta\rho_2 v + \gamma\rho_3 w$$

et l'on tire de là que le système (5) est entièrement équivalent au suivant:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{M_1\mu_1}{a} + \frac{P_1\pi_1}{\beta} + \frac{R_1\rho_1}{\gamma} &= \frac{1}{a} \\ \frac{M_2\mu_2}{a} + \frac{P_2\pi_2}{\beta} + \frac{R_2\rho_2}{\gamma} &= \frac{1}{\beta} \\ \frac{M_3\mu_3}{a} + \frac{P_3\pi_3}{\beta} + \frac{R_3\rho_3}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \\ \frac{\mu_2 M_1}{a} + \frac{P_1\pi_2}{\beta} + \frac{R_1\rho_2}{\gamma} &= 0 \\ \frac{\mu_3 M_1}{a} + \frac{P_1\pi_3}{\beta} + \frac{R_1\rho_3}{\gamma} &= 0 \\ \frac{\mu_3 M_2}{a} + \frac{P_2\pi_3}{\beta} + \frac{R_2\rho_3}{\gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Ceci posé, supposons d'abord que α , β et γ soient de même signe, par exemple positifs. On déduit de la forme des trois premières équations (6) que les substitutions sont en nombre limité, puisque les M , P , R sont de la forme $\frac{E}{al}$, E étant entier. Par conséquent il n'y a pour une forme quadratique définie $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ qu'un nombre limité de substitutions à coefficients entiers, la transformant en elle-même.

4. Passons au cas où la forme est indéfinie, c'est à dire où α , β et γ ne sont pas de même signe, soit

$$a > 0 \quad \beta > 0 \quad \gamma = -\bar{\gamma} < 0.$$

Il y a dans ce cas une infinité de substitutions à coefficients entiers transformant en elle-même la forme f . Je me propose d'établir la proposition suivante.

Considérons le groupe des substitutions

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

effectuées sur les deux variables x et y ; je dis que ce groupe sera discontinu pour tout système de valeurs x et y telles que

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

en posant $x = x' + ix''$ et $y = y' + iy''$.

Remarquons d'abord qu'en faisant sur u, v, w la substitution

$$U = M_1u + P_1v + R_1w$$

$$V = M_2u + P_2v + R_2w$$

$$W = M_3u + P_3v + R_3w$$

on aura:

$$\alpha UU_0 + \beta VV_0 - \gamma WW_0 = \alpha uu_0 + \beta vv_0 - \gamma ww_0$$

et par suite

$$\alpha(X'^2 + X''^2) + \beta(Y'^2 + Y''^2) - g = \frac{1}{\text{mod}^2(M_3x + P_3y + R_3)} [\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g]$$

en posant, bien entendu, $X = X' + iX''$ et $Y = Y' + iY''$.

Il en résulte que si le système x, y est à l'intérieur du domaine défini par l'inégalité

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

il en sera de même du système des variables transformées X et Y .

Observons maintenant qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de substitutions du groupe pour lesquelles le module de R_3 soit moindre qu'une quantité donnée K ; c'est ce qui résulte des équations (5) et (6). L'équation:

$$\frac{M_3\mu_3}{\alpha} + \frac{P_3\pi_3}{\beta} = \frac{R_3\rho_3}{g} - \frac{1}{g}$$

par exemple, montre que les modules de M_3 et P_3 seront limitées en fonction de K et les trois premières équations (5) apprennent successivement qu'il en est de même pour M_1, P_1, R_1 et M_2, P_2, R_2 . Donc

d'après leur forme, les quantités M , P , R ne peuvent avoir qu'un nombre limité de valeurs.

Montrons enfin, et c'est le point essentiel dans notre démonstration, que quand le module de R_3 grandit indéfiniment

$$\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)$$

grandit lui-même indéfiniment. On a en effet:

$$\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3) > \text{mod } R_3 - \text{mod } (M_3x) - \text{mod } (P_3y)$$

le second membre de cette inégalité étant, comme nous allons voir, positif. Nous l'écrivons sous la forme:

$$\frac{\text{mod}^2 R_3 - [\text{mod } (M_3x) + \text{mod } (P_3y)]^2}{\text{mod } R_3 + \text{mod } (M_3x) + \text{mod } (P_3y)}$$

ou en remplaçant $\text{mod}^2 R_3$ par sa valeur $1 + g \left(\frac{\text{mod}^2 M_3}{\alpha} + \frac{\text{mod}^2 P_3}{\beta} \right)$

$$\frac{1 + \left(\frac{g}{\alpha} - \text{mod}^2 x \right) \text{mod}^2 M_3 + \left(\frac{g}{\beta} - \text{mod}^2 y \right) \text{mod}^2 P_3 - 2 \text{mod } x \cdot \text{mod } y \cdot \text{mod } M_3 \text{mod } P_3}{\text{mod } R_3 + \text{mod } x \cdot \text{mod } M_3 + \text{mod } y \cdot \text{mod } P_3}$$

Or le numérateur, abstraction faite de l'unité, est un polynôme homogène en $\text{mod } M_3$ et $\text{mod } P_3$; on vérifie aisément qu'il est essentiellement positif, le discriminant est en effet:

$$\text{mod}^2 x \cdot \text{mod}^2 y - \left(\frac{g}{\alpha} - \text{mod}^2 x \right) \left(\frac{g}{\beta} - \text{mod}^2 y \right)$$

ou

$$\frac{g}{\beta^2} (x'^2 + x''^2) + \frac{g}{\alpha} (y'^2 + y''^2) - \frac{g^2}{\alpha\beta}$$

et on voit qu'il est négatif puisque, par hypothèse:

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) < g$$

d'autre part le coefficient de $\text{mod}^2 M_3$

$$\frac{g}{\alpha} - (x'^2 + x''^2)$$

sera certainement positif d'après l'inégalité précédente. Écrivons maintenant la limite inférieure de $\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3)$ sous la forme

$$\frac{\left(\frac{g}{\alpha} - \text{mod}^2 x\right) \frac{\text{mod}^2 M_3}{\text{mod}^2 R_3} + \left(\frac{g}{\beta} - \text{mod}^2 y\right) \frac{\text{mod}^2 P_3}{\text{mod}^2 R_3} - 2 \text{mod} x \text{mod} y \frac{\text{mod} M_3}{\text{mod} R_3} \cdot \frac{\text{mod} P_3}{\text{mod} R_3} + \frac{1}{\text{mod}^2 R_3}}{1 + \text{mod} x \cdot \frac{\text{mod} M_3}{\text{mod} R_3} + \text{mod} y \cdot \frac{\text{mod} P_3}{\text{mod} R_3}}$$

D'après ce qui vient d'être dit et en remarquant que $\frac{\text{mod} M_3}{\text{mod} R_3}$ et $\frac{\text{mod} P_3}{\text{mod} R_3}$ restent, quand R_3 augmente indéfiniment, toujours moindres qu'une expression facile à déterminer puisque

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\text{mod}^2 M_3}{\text{mod}^2 R_3} + \frac{1}{\beta} \frac{\text{mod}^2 P_3}{\text{mod}^2 R_3} = \frac{1}{g} - \frac{1}{g \text{mod}^2 R_3}$$

on voit qu'on pourra fixer un nombre positif A dépendant uniquement de x, y, g, α et β , auquel le coefficient de $\text{mod} R_3$ sera constamment supérieur, et on aura alors

$$\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \text{mod} R_3$$

et il est donc bien établi que, quand $\text{mod} R_3$ augmente indéfiniment, il en sera de même de $\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3)$.

5. Ces remarques faites, la démonstration va s'achever bien aisément. Reprenons en effet l'égalité précédemment établie:

$$\begin{aligned} & -\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g = \\ & = \frac{1}{\text{mod}^2 [M_3x + P_3y + R_3]} [-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g] \end{aligned}$$

où les deux membres sont positifs; on aura, d'après l'inégalité ci-dessus écrite:

$$-\alpha(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g < \frac{1}{\text{mod}^2 R_3} \cdot \frac{1}{A^2} [-\alpha(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

On en conclut que le groupe est discontinu; car on aurait dans le cas contraire une substitution

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3} \quad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

pour laquelle X et Y différeraient respectivement d'aussi peu que l'on voudrait de x et y et pour laquelle on aurait par conséquent:

$$-a(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2) + g = (1 + \varepsilon)[-a(x'^2 + x''^2) - \beta(y'^2 + y''^2) + g]$$

ε étant une quantité réelle dont la valeur absolue est moindre qu'un nombre positif γ donné à l'avance aussi petit que l'on voudra: par suite

$$(1 + \varepsilon) < \frac{1}{\text{mod}^2 R_3} \cdot \frac{1}{A^2}$$

donc

$$\text{mod}^2 R_3 < \frac{1}{(1 + \varepsilon)A^2} < \frac{1}{1 - \gamma} \cdot \frac{1}{A^2}$$

mais le nombre des substitutions pour lesquelles le carré du module de R_3 est moindre que $\frac{1}{1 - \gamma} \cdot \frac{1}{A^2}$ est fini, d'après une remarque faite précédemment, et on ne peut évidemment pas alors trouver parmi elles des substitutions pour lesquelles X et Y diffèrent de x et y d'aussi peu que l'on voudra.

On voit d'ailleurs que, pour la suite des systèmes de valeurs X et Y , quand on effectue sur x et sur y toutes les substitutions du groupe, l'expression positive

$$g - a(X'^2 + X''^2) - \beta(Y'^2 + Y''^2)$$

tend vers zéro, puisque $\text{mod} R_3$ grandit sans limite.

Il est clair que l'analyse précédente ne subsiste pas, si le système x, y est en dehors du domaine défini par l'inégalité:

$$a(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0.$$

Dans ce cas chaque substitution du groupe ne donne plus nécessairement pour X et Y une valeur déterminée. Prenons en effet la substitution

$$X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3}$$

Supposons que le système x, y satisfasse aux deux équations

$$M_1 x + P_1 y + R_1 = 0$$

$$M_3 x + P_3 y + R_3 = 0$$

on voit que Y aura une valeur infinie et que X sera indéterminée.

Cette circonstance ne peut pas se présenter quand (x, y) est à l'intérieur du domaine précédemment défini, parce que dans ce cas

$$\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \text{mod} R_3$$

et par suite $\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3)$ n'est jamais nul.

6. Dans le groupe des substitutions à coefficients entiers, transformant en elle-même une forme $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$, on peut considérer un sous-groupe particulièrement intéressant. L'invariant de la forme se reproduisant multiplié par le carré du module du déterminant de la substitution, ce module doit être égal à l'unité; le sous-groupe que j'ai en vue est celui pour lequel le déterminant lui-même est égal à l'unité. C'est toujours de celui-là qu'il sera question dans la suite, quand nous parlerons du groupe des substitutions transformant la forme en elle-même.

7. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier. Nous prenons la forme

$$xx_0 + yy_0 - zz_0$$

et nous considérons le groupe des substitutions à coefficients entiers de la forme $a + bi$ (où a et b sont des entiers réels), transformant cette forme en elle-même. Soit

$$x = M_1X + P_1Y + R_1Z$$

$$y = M_2X + P_2Y + R_2Z$$

$$z = M_3X + P_3Y + R_3Z$$

les relations du paragraphe (3) deviennent

$$M_1\mu_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 = 1$$

$$P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = 1$$

$$R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3 = -1$$

$$P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 = 0$$

$$M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 = 0$$

$$P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 = 0$$

système qui est équivalent au suivant:

$$\begin{aligned}
 & M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 = 1 \\
 & M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 = 1 \\
 & M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 = -1 \\
 (\varepsilon) \quad & \mu_2M_1 + \pi_2P_1 - R_1\rho_2 = 0 \\
 & \mu_2M_3 + \pi_2P_3 - R_3\rho_2 = 0 \\
 & \mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 = 0
 \end{aligned}$$

Nous allons encore remplacer ce système par un autre; remarquons à cet effet que les équations.

$$\begin{aligned}
 \mu_2M_1 + \pi_2P_1 - R_1\rho_2 &= 0 \\
 \mu_2M_3 + \pi_2P_3 - R_3\rho_2 &= 0
 \end{aligned}$$

donnent

$$\frac{\mu_2}{-P_1R_3 + P_3R_1} = \frac{\pi_2}{-R_1M_3 + R_3M_1} = \frac{\rho_2}{M_1P_3 - M_3P_1}$$

désignons par s la valeur commune de ces rapports; en substituant ces valeurs dans la seconde des équations (ε) , on a:

$$s[M_2(P_3R_1 - P_1R_3) + P_2(M_1R_3 - R_1M_3) + R_2(M_3P_1 - M_1P_3)] = 1$$

or le coefficient de s est le déterminant de la substitution, il est donc égal à ± 1 ou $\pm i$. Ne considérons que le sous-groupe pour lequel ce déterminant est égal à l'unité: on aura alors $s = 1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= P_3R_1 - P_1R_3 \\
 \pi_2 &= M_1R_3 - M_3R_1 \\
 \rho_2 &= M_1P_3 - M_3P_1
 \end{aligned}$$

auquel il faut adjoindre:

$$\begin{aligned}
 M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 &= 1 \\
 M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 &= -1 \\
 \mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 &= 0
 \end{aligned}$$

et de ce système de six équations on peut d'ailleurs facilement déduire

le système des équations (ε) . On a en effet d'après les trois dernières équations:

$$-(M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1)(M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3) + (\mu_1M_1 + \pi_1P_1 - \rho_1R_1)(M_3\mu_1 + P_3\pi_1 - \rho_1R_3) = 1$$

ce qui peut s'écrire:

$$(P_3R_1 - P_1R_3)(\pi_3\rho_1 - \pi_1\rho_3) + (M_1R_3 - M_3R_1)(\mu_1\rho_3 - \mu_3\rho_1) - (M_1P_3 - M_3P_1)(\mu_1\pi_3 - \mu_3\pi_1) = 1$$

ou enfin

$$M_1\mu_2 + P_2\mu_2 - R_2\rho_2 = 1.$$

Quant aux autres équations (ε) on voit de suite qu'elles sont vérifiées. Avec cette nouvelle forme, le groupe se trouve donné par les valeurs de

$$M_1, P_1, R_1, M_3, P_3, R_3$$

vérifiant les équations

$$M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 = 1$$

$$M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 = -1$$

$$\mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 = 0$$

A toute solution de ces équations correspondront des valeurs entières de M_2, P_2 et R_2 . Je reviendrai dans un autre travail sur le groupe précédent.

8. Reprenant maintenant le cas général, je veux montrer que l'on peut former des fonctions uniformes des deux variables x et y , définies pour tous les systèmes de valeurs x et y du domaine D déjà considéré, domaine défini par l'inégalité

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

et qui se reproduisent pour toutes les substitutions du groupe (M, P, R) c'est à dire quand on remplace x et y par

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}.$$

Comme je l'ai dit plus haut (paragr. 6), je considère le groupe des sub-

stitutions pour lequel le déterminant de la substitution est égal à l'unité; nous avons donc ici

$$\begin{vmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1.$$

J'envisage le déterminant fonctionnel de X et Y , soit $D(X, Y)$; nous allons étudier la série dont le terme général est:

$$[\text{mod } D(X, Y)]^m$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe; et nous prouverons qu'à partir d'une valeur convenable de l'entier m , la série est convergente. Calculons d'abord ce déterminant fonctionnel, on trouve de suite:

$$D(X, Y) = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^3}$$

Nous avons donc à considérer la série:

$$\frac{1}{\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}.$$

Pour démontrer la convergence de cette série, nous emploierons deux méthodes distinctes, l'une particulière à la nature spéciale des groupes que nous venons d'étudier, l'autre beaucoup plus générale et applicable à tout groupe discontinu, moyennant seulement quelques hypothèses sur la nature de ce groupe.

9. Pour plus de simplicité, supposons que le groupe considéré soit le groupe des substitutions à coefficients entiers de la forme $a + bi$, transformant en elle-même la forme:

$$auu_0 + \beta vv_0 - gww_0$$

le même raisonnement, avec quelques légères modifications seulement, serait applicable au cas général précédemment étudié.

Nous avons établi (paragr. 4) que pour un système de valeurs x, y situé à l'intérieur du domaine D , on a:

$$\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3) > A \cdot \text{mod } R_3$$

A étant une constante dépendant seulement de x, y et α, β et γ , mais nullement des M, P, R .

Pour une valeur donnée à R_3 , il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions appartenant au groupe (paragr. 4); cherchons une limite supérieure de ce nombre. Remarquons d'abord qu'il résulte des équations (5) et (6) (paragr. 3) qu'à une valeur donnée de R_3, M_3, P_3, R_1, R_2 ne peut correspondre qu'une seule substitution. Nous avons donc seulement à chercher, pour une valeur donnée de R_3 , le nombre maximum de valeurs possibles pour le système des quatre quantités M_3, P_3, R_1 et R_2 . Il nous suffira de considérer les équations:

$$\frac{M_3 u_3}{a} + \frac{P_3 \pi_3}{\beta} - \frac{R_3 \rho_3}{g} = -\frac{1}{g}$$

$$aR_1 \rho_1 + \beta R_2 \rho_2 - gR_3 \rho_3 = -g$$

Soit $R_3 = a + bi$ et posons

$$R_1 = m + in, \quad R_2 = p + iq$$

La seconde équation s'écrira:

$$a(m^2 + n^2) + \beta(p^2 + q^2) = g(a^2 + b^2 - 1)$$

m et n seront certainement moindres que $\sqrt{\frac{g}{a}(a^2 + b^2)}$ et p sera moindre que $\sqrt{\frac{g}{\beta}(a^2 + b^2)}$; donc le nombre de systèmes de valeurs possibles pour R_1 et R_2 sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \cdot N$$

N étant une constante purement numérique, dépendant seulement de α, β et g , qu'il est inutile de fixer. Tout pareillement le nombre de systèmes de valeurs possibles pour M_3 et P_3 sera moindre que

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \cdot N_1$$

donc pour la valeur $R_3 = a + bi$, une limite supérieure du nombre de substitutions entière possible dans le groupe, sera:

$$N \cdot N_1 (a^2 + b^2)^3$$

Revenons maintenant à la série dont le terme général est

$$\frac{1}{\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

il pourra y avoir un certain nombre de termes pour lesquels R_3 aura la même valeur, mais ce nombre sera moindre que $N^2(a^2 + b^2)^2$.

On a d'autre part

$$\frac{1}{\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)^{3m}} < \frac{1}{A^{3m}} \cdot \frac{1}{(\text{mod } R_3)^{3m}}$$

donc la somme des termes pour lesquels R_3 a la même valeur, sera moindre que

$$\frac{NN_1}{A^{3m}} \frac{(a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

la série tout entière sera donc moindre que le produit de $\frac{NN_1}{A^{3m}}$ par la série dont le terme général est:

$$\frac{(a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{3m}{2}}}$$

où a et b reçoivent toutes les valeurs entières possibles, à l'exception de $a = 0$, $b = 0$. Or on voit facilement que pour toute valeur de m , égale ou supérieure à 3 cette dernière série converge. Dans le cas de $m = 3$, son terme général est en effet:

$$\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Faisant varier a et b depuis l'unité jusqu'à l'infini, nous prouverons la convergence de cette série en montrant que l'intégrale double

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{da db}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a un sens déterminé. Or cette intégrale peut s'écrire

$$\int_1^\infty \int_{\frac{1}{a}}^\infty \frac{da dt}{a^2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{qui est moindre que} \quad \int_1^\infty \frac{da}{a^2} \times \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

expression dont la valeur est parfaitement déterminée.

Nous avons donc établi que la série

$$\sum \frac{1}{\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)^{sm}}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente si m est égal ou supérieur à trois. Notre seconde démonstration nous permettra de voir que ce résultat subsiste quand on a $m = 2$.

10. Avant d'exposer cette seconde démonstration, voyons de suite le parti que l'on peut tirer du résultat précédent pour obtenir des fonctions restant invariables pour toutes les substitutions du groupe. Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y restant uniforme et continue pour tous les points à l'intérieur ou sur la limite du domaine D

$$\alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0$$

Tout polynome entier satisfait naturellement à cette condition; comme exemple d'une fonction qui ne soit pas entière citons

$$\frac{1}{a - x - y}$$

a étant une quantité positive supérieure à $\frac{g(\beta + a)}{\alpha\beta}$.

Formons alors la série

$$(\alpha) \quad \sum R \left(\frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3} \right) \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{sm}}$$

qui est étendue à toutes les substitutions du groupe. Puisque nous avons établi que la série de terme général

$$\frac{1}{\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3)^{sm}}$$

était convergente; il s'ensuit que la série des modules des termes de la série (α) est convergente. Nous formons donc ainsi une fonction de x et y uniforme et continue pour tout système de valeurs (x, y) à l'intérieur

du domaine D ; soit $P(x, y)$ cette fonction. Il est facile de voir ce que devient cette fonction quand on fait sur (x, y) une substitution du groupe; chaque terme de la nouvelle série devient égal à un terme de la première, multiplié par le dénominateur des formules de substitution, élevé à la puissance $3m$.

On a donc, pour toute substitution (M, P, R)

$$P\left[\frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}\right] = (M_3x + P_3y + R_3)^{3m} \cdot P(x, y).$$

Ces fonctions sont, comme on le voit, les analogues des fonctions d'une variable, appelées thétafuchsiennes par M. POINCARÉ et qui jouent un rôle si important dans sa théorie des fonctions fuchsiennes.

11. Ce résultat serait illusoire si la fonction $P(x, y)$ était identiquement nulle: c'est un point qui paraît peu vraisemblable, vu surtout le degré de généralité de la fonction rationnelle R ; mais pour plus de sûreté montrons en toute rigueur, que ce résultat ne peut se présenter, quelle que soit la fonction rationnelle R , au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de l'entier m . Nous raisonnerons encore, pour plus de simplicité, sur le groupe des substitutions (paragr. 9) à coefficients entiers transformant en elle-même la forme

$$auu_0 + \beta vv_0 - \gamma ww_0$$

et il nous suffira de constater que la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

au moins pour certaines valeurs de m , n'est pas nulle pour $x = 0, y = 0$. Or il y a un nombre limité N de substitutions pour lesquelles on a $R_3 = \pm 1$ ou $\pm i$, et en prenant $m = 4n$, la part provenant de ces termes sera évidemment N . Pour tous les autres termes le module de R_3 sera supérieur à l'unité; chaque terme sera très-petit si n est suffisamment grand et par conséquent leur somme, puisque nous savons que la série est convergente; la série différera donc peu de N et par conséquent ne sera pas nulle. Nous sommes donc assuré que la série précédente ne

peut pas toujours être identiquement nulle, et alors il en est évidemment de même de la série (α) précédemment formée.

12. La connaissance des fonctions $P(x, y)$ conduit immédiatement à la formation de fonctions se reproduisant pour toutes les substitutions du groupe. Prend on en effet deux fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ correspondant à la même valeur de m ; on a, en posant

$$F(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$$F\left(\frac{M_1x + P_1y + Q_1}{M_3x + P_3y + Q_3}, \frac{M_2x + P_2y + Q_2}{M_3x + P_3y + Q_3}\right) = F(x, y)$$

Il existe donc des fonctions uniformes des deux variables indépendantes x et y , définies dans le domaine D et se reproduisant quand on effectue sur x et y toutes les substitutions du groupe (M, P, R) .

13. J'arrive maintenant à la seconde démonstration que j'ai annoncée pour la convergence de la série:

$$\sum \frac{1}{(M_3x + P_3y + R_3)^{3/2}}$$

Cette démonstration ne s'applique pas seulement aux groupes dont nous nous sommes occupés dans cette étude, mais à tout groupe discontinu jouissant des propriétés suivantes.

Considérons le domaine D limité par la relation

$$x'^2 + x''^2 + y'^2 + y''^2 = 1$$

et désignons encore par:

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

une substitution quelconque du groupe proposé. Nous supposons d'abord qu'à tout point (x, y) sur la limite du domaine [j'appelle, pour abréger, point (x, y) l'ensemble des valeurs x et y] correspond un point de cette même limite ce qui nous donne les relations

$$M_1\mu_1 + M_2\mu_2 - M_3\mu_3 = P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = -(R_1\rho_1 + R_2\rho_2 - R_3\rho_3)$$

$$P_1\mu_1 + P_2\mu_2 - P_3\mu_3 = 0$$

$$M_1\rho_1 + M_2\rho_2 - M_3\rho_3 = 0$$

$$P_1\rho_1 + P_2\rho_2 - P_3\rho_3 = 0$$

où, comme précédemment, les lettres grecques sont les conjuguées des grandes lettres correspondantes. Nous supposons de plus que le déterminant (M, P, R) de la substitution soit égal à l'unité. Or désignons par k la valeur commune, nécessairement réelle, des trois expressions sur la première ligne, on tire des autres équations:

$$\frac{P_1}{-\mu_2\rho_3 + \mu_3\rho_2} = \frac{P_2}{-\rho_1\mu_3 + \rho_3\mu_1} = \frac{P_3}{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1} = s$$

et en substituant dans la relation

$$P_1\pi_1 + P_2\pi_2 - P_3\pi_3 = k$$

on aura, en tenant compte de ce que le déterminant est supposé égal à l'unité

$$s = k$$

donc

$$P_1 = k(\mu_3\rho_2 - \mu_2\rho_3)$$

$$P_2 = k(\mu_1\rho_3 - \mu_3\rho_1)$$

$$P_3 = k(\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1)$$

et de même on trouverait:

$$M_1 = k(\pi_2\rho_3 - \pi_3\rho_2), \quad R_1 = k(\pi_2\mu_3 - \mu_2\pi_3)$$

$$M_2 = k(\pi_3\rho_1 - \pi_1\rho_3), \quad R_2 = k(\mu_1\pi_3 - \pi_1\mu_3)$$

$$M_3 = k(\pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2), \quad R_3 = k(\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1)$$

d'où on conclut en portant les valeurs des M et R dans les expressions des P

$$P_1 = k^3 P_1, \quad P_2 = k^3 P_2, \quad P_3 = k^3 P_3$$

on en conclut que $k^3 = 1$ et par suite $k = 1$.

Les relations entre les M, P, R ont donc absolument la même forme

que celles que nous avons considéré au paragraphe (7). Seulement dans ce dernier les M , P , R représentaient des entiers complexes, tandis qu'ici nous ne savons rien sur ces constantes.

D'après la forme de ces équations, une substitution quelconque du groupe transformera un point du domaine D en un point du même domaine. Nous supposons enfin que le groupe est discontinu pour tous les points à l'intérieur de D , et voici ce que nous entendons par là: x , y étant un point quelconque à l'intérieur de D et D_1 étant un domaine quelconque comprenant ce point mais compris lui-même tout entier dans D , les transformations du groupe effectuées sur (x, y) ne donneront qu'un nombre limité de points à l'intérieur de D_1 ; par suite quand on effectue sur (x, y) toutes les transformations du groupe, les valeurs transformées tendent vers la limite du domaine D .

Considérons le dénominateur

$$M_3x + P_3y + R_3$$

on a

$$\text{mod}(M_3x + P_3y + R_3) = \text{mod } R_3 \cdot \text{mod} \left(\frac{M_3}{R_3}x + \frac{P_3}{R_3}y + 1 \right)$$

or nous avons les relations [relations (ε) du paragr. 7]

$$M_1\mu_1 + P_1\pi_1 - R_1\rho_1 = 1$$

$$M_2\mu_2 + P_2\pi_2 - R_2\rho_2 = 1$$

$$M_3\mu_3 + P_3\pi_3 - R_3\rho_3 = -1$$

$$\mu_2M_1 + \pi_2P_1 - R_1\rho_2 = 0$$

$$\mu_2M_3 + \pi_2P_3 - R_3\rho_2 = 0$$

$$\mu_3M_1 + \pi_3P_1 - R_1\rho_3 = 0$$

on voit donc que $\text{mod } R_3 \geq 1$ et

$$\text{mod}^2 \frac{M_3}{R_3} + \text{mod}^2 \frac{P_3}{R_3} = 1 - \frac{1}{\text{mod}^2 R_3}$$

$\text{mod} \frac{M_3}{R_3}$ et $\text{mod} \frac{P_3}{R_3}$ sont donc moindres que un et pour un point (x, y) à l'intérieur de D , on a

$$\text{mod} \left(\frac{M_3}{R_3} x + \frac{P_3}{R_3} y + 1 \right) < 3$$

On peut trouver une limite inférieure de la même quantité, en suivant la voie du paragr. (4); on a ainsi

$$\begin{aligned} & \text{mod} \left(\frac{M_3}{R_3} x + \frac{P_3}{R_3} y + 1 \right) > \\ & > \frac{(1 - \text{mod}^2 x) \text{mod}^2 \frac{M_3}{R_3} + (1 - \text{mod}^2 y) \text{mod}^2 \frac{P_3}{R_3} - 2 \text{mod} x \cdot \text{mod} y \cdot \text{mod} \frac{M_3}{R_3} \cdot \text{mod} \frac{P_3}{R_3} + \frac{1}{\text{mod}^2 R_3}}{1 + \text{mod} x \cdot \text{mod} \frac{M_3}{R_3} + \text{mod} y \cdot \text{mod} \frac{P_3}{R_3}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\text{mod} \left(\frac{M_3}{R_3} x + \frac{P_3}{R_3} y + 1 \right) > \frac{1 - \text{mod}^2 x - \text{mod}^2 y}{3(1 - \text{mod}^2 x)}$$

Ecrivons donc

$$\text{mod} (M_3 x + P_3 y + R_3) = A \cdot \text{mod} R_3,$$

A satisfaisant aux conditions

$$\frac{1 - \text{mod}^2 x - \text{mod}^2 y}{3(1 - \text{mod}^2 x)} < A < 3$$

Ceci posé, soit x_0, y_0 un point tel que la substitution unité soit la seule qui le transforme en lui-même (c'est évidemment ce qui arrive pour un point pris arbitrairement), et envisageons la série $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ des points transformés de (x_0, y_0) par les substitutions du groupe. Je trace autour du point (x_0, y_0) un petit domaine: soit pour fixer les idées

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (x'' - x''_0)^2 + (y'' - y''_0)^2 = \varepsilon^2,$$

ou ε est une quantité très-petite, la limite de ce domaine que nous appellerons ∂_0 . Les substitutions transformeront le domaine ∂_0 en une série de domaines $\partial_1, \partial_2, \dots$ autour des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$. Le groupe étant discontinu, il est clair que l'on pourra prendre ε suffisamment petit pour que tous ces domaines soient extérieurs les uns aux

autres; supposons donc ε ainsi choisi. Considérons alors l'intégrale quadruple:

$$\int \int \int \int dx' dx'' dy' dy''$$

étendue à chacun des domaines $\delta_0, \delta_1, \dots$; la somme de toutes ces intégrales aura une valeur finie, car elle est évidemment moindre que la valeur de l'intégrale précédente étendue au domaine D tout entier. Or soit l'intégrale

$$\int \int \int \int dX' dX'' dY' dY''$$

étendue au domaine δ transformée de δ_0 par la substitution:

$$X = \frac{M_1x + P_1y + R_1}{M_3x + P_3y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2x + P_2y + R_2}{M_3x + P_3y + R_3}$$

on voit, par un calcul bien simple, que l'intégrale précédente est égale à l'intégrale

$$\int \int \int \int \frac{dx' dx'' dy' dy''}{\text{mod}^2 (M_3x + P_3y + R_3)^3}$$

étendue au domaine δ_0 ; de cette manière toutes les intégrales se trouvent ramenées à ce domaine. Le terme général de la série sera donc

$$\frac{1}{\text{mod}^2 R_3^3} \cdot \int \int \int \int \frac{dx' dx'' dy' dy''}{A^6}$$

Or d'après les limites données à l'instant pour A , cette dernière intégrale quadruple sera comprise entre deux limites, la limite inférieure étant une quantité différente de zéro, et on conclut que la série de terme général

$$\frac{1}{\text{mod}^2 R_3^3}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe est convergente. Il en résulte immédiatement que la série de terme général

$$\frac{1}{\text{mod} (M_3x + P_3y + R_3)^{3m}}$$

est convergente, m étant supérieur ou égal à deux, puisque l'on a

$$\text{mod } (M_3x + P_3y + R_3) = A \text{ mod } R_3$$

A étant limité, comme il a été indiqué plus haut.

On voit donc que pour tous les groupes discontinus jouissant des propriétés énoncées, il existe des fonctions qui restent invariables pour toutes les substitutions de ces groupes.

Paris, le 28 décembre 1882.

UEBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN,
ZWISCHEN DEREN INTEGRALEN HOMOGENE RELATIONEN
HÖHEREN ALS ERSTEN GRADES BESTEHEN

VON

L. FUCHS

IN HEIDELBERG.

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung ist dadurch characterisirt, dass zwischen den Elementen des Systems keine homogene Gleichung *ersten* Grades mit constanten Coefficienten stattfinden darf. Man kann aber voraussetzen, dass zwischen den Elementen homogene Relationen *höheren* Grades bestehen. Ist die Ordnung der Differentialgleichung die m^e , so ist nur erforderlich, dass die Anzahl solcher Relationen nicht grösser als $m - 2$ sei. — Es ist alsdann die besondere Natur der Integrale unter Voraussetzung solcher Relationen zu ergründen.

Im Folgenden habe ich die Lösung dieses Problems für die Differentialgleichungen dritter Ordnung durchgeführt. Für diese kann es nur *eine* Relation der genannten Art geben. Bemerkenswerth sind die Anwendungen, welche wir bei unserer Untersuchung von der Theorie der Abelschen Integrale haben machen können.

Es ist einleuchtend, dass die Differentialgleichungen, welche algebraisch integrirbar sind, zu der Classe von Differentialgleichungen gehören, zwischen deren Integralen homogene Relationen bestehen.

Wir haben in der folgenden Arbeit auch eine Reihe von Sätzen über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen aufgestellt, von

welchen wir in derselben Arbeit Gebrauch machen, die aber auch anderweitige Anwendungen zulassen.

Die Resultate dieser Arbeit habe ich in der auch gegenwärtig festgehaltenen Reihenfolge bereits in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 8 Juni 1882, veröffentlicht.

1.

Es sei

$$(A) \quad \frac{d^3 y}{dz^3} + p \frac{d^2 y}{dz^2} + q \frac{dy}{dz} + r y = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, gehörig zu der Classe von Differentialgleichungen, welche sich in meiner Arbeit (BORCHARDT's Journal für Mathem. B. 66 S. 146 Gl. 12) characterisirt finden, und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A) y_1, y_2, y_3 eine irreductible Gleichung

$$(B) \quad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

stattfinde, wo $f(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von y_1, y_2, y_3 bedeutet.

Bezeichnen wir mit $H(f)$ die Hessische Covariante von f , so ist $H(f)$ nicht identisch Null, da der Voraussetzung nach f nicht in lineare Factoren zerlegbar ist.⁽¹⁾

Ein beliebiger Umlauf von z führe y_x über in

$$(1) \quad y'_x = \alpha_{x1} y_1 + \alpha_{x2} y_2 + \alpha_{x3} y_3 \quad (x = 1, 2, 3)$$

so geht f , folglich auch $H(f)$ durch denselben Umlauf in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt über. Demnach ist $\frac{d \log H(f)}{dz}$ eine eindeutige Function von z . Da ausserdem der vorausgesetzten Natur der

(¹) Vergl. GORDAN und NÖTHER, in den Sitzungsberichten der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen 13 Dec. 1875, 10 Jan. 1876.

Integrale der Gleichung (A) wegen diese Function für jeden im Endlichen gelegenen Punkt p in der z -Ebene mit einer bestimmten Potenz von $z - p$, und für $z = \infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist dieselbe eine rationale Function. Da $H(f)$ ebenfalls für jeden im Endlichen befindlichen Punkt p mit einer bestimmten Potenz von $z - p$ und für $z = \infty$ mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{z}$ multiplicirt endlich und stetig wird, so ist demnach

$$(2) \quad H(f) = X(z)$$

Wurzel einer rationalen Function von z .

Setzen wir

$$(3) \quad \frac{y_2}{y_1} = \eta, \quad \frac{y_3}{y_1} = \zeta$$

$$H(f) = y_1^{3n-6} \cdot H_1(\eta, \zeta)$$

so verwandelt sich die Gl. (2) in

$$(4) \quad \left[y_1 X(z)^{-\frac{1}{3n-6}} \right]^{3n-6} \cdot H_1(\eta, \zeta) = 1$$

Ist z ein beliebiger Werth, und nimmt auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (A) für $z = z_1$ je einen gleichen Werth an wie für $z = z$, so folgt aus der Gleichung (4), dass auf denselben Wegen $y_1 \cdot X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ in z_1 einen Werth annimmt, welcher aus dem für z durch Multiplication mit einer Einheitswurzel λ hervorgeht. Da jeder Quotient zweier Integrale für $z = z_1$ denselben Werth wie für z annimmt, so folgt, dass auch $y_2 \cdot X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$, $y_3 \cdot X(z)^{-\frac{1}{3n-6}}$ für $z = z_1$ Werthe annehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit λ hervorgehen.

Substituirt man daher in (A)

$$y = X(z)^{\frac{1}{3n-6}} \cdot v,$$

wodurch dieselbe in

$$(A') \quad \frac{d^3 v}{dz^3} + p' \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} + q' \cdot \frac{dv}{dz} + r' v = 0$$

übergehen möge, so hat das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen v_1, v_2, v_3 der Gleichung (A') die Eigenschaft für $z = z_1$ Werthe anzunehmen, welche aus denen für z durch Multiplication mit derselben Einheitswurzel λ hervorgehen.

Zwischen v_1, v_2, v_3 findet die Gleichung

$$(B') \quad f(v_1, v_2, v_3) = 0$$

statt.

Sei

$$v_1 = \varphi_1(z), \quad v_2 = \varphi_2(z), \quad v_3 = \varphi_3(z),$$

so ist der Voraussetzung gemäss, wenn man von z auf geeigneten Wegen nach z_1 geht,

$$(5) \quad \varphi_x(z_1) = \lambda \cdot \varphi_x(z), \quad x = 1, 2, 3,$$

wo λ eine Einheitswurzel bedeutet.

Die Functionen $\varphi_x(z_1)$ genügen der Gleichung

$$(6) \quad \frac{d^3 v}{dz^3} + p'(z_1) \frac{d^2 v}{dz^2} + q'(z_1) \frac{dv}{dz} + r'(z_1) v = 0$$

Es sei

$$z = \psi(z_1), \quad \frac{dz}{dz_1} = \psi'(z_1).$$

Transformirt man Gl. (6) in die unabhängige Variable z , so folgt

$$(6a) \quad \frac{d^3 v}{dz^3} \psi'^3 + [3\psi' \cdot \psi'' + p'(z_1)\psi'^2] \frac{d^2 v}{dz^2} + [\psi^{(3)} + p'(z_1)\psi^{(2)} + q'(z_1)\psi'] \frac{dv}{dz} + r'(z_1)v = 0$$

Dividirt man diese Gleichung durch ψ'^3 , so muss dieselbe wegen Gleichung (5) mit Gleichung (A') übereinstimmen. Man erhält also

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{3\psi^{(2)}}{\psi'^2} + \frac{p'(z_1)}{\psi'} &= p'(z) \\ \frac{\psi^{(3)}}{\psi'^3} + p'(z_1) \frac{\psi^{(2)}}{\psi'^3} + \frac{q'(z_1)}{\psi'^2} &= q'(z) \\ \frac{r'(z_1)}{\psi'^3} &= r'(z) \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$(8) \quad \psi^3 = C \cdot \frac{J'(z_1)}{J'(z)},$$

wo

$$(9) \quad J(z) = e^{-\int p'(z) dz}$$

gesetzt ist, und C eine Constante bedeutet. Diese Constante ist von Null verschieden, da ψ' nicht identisch verschwinden darf.

Aus der letzten der Gleichungen (7) und aus Gleichung (8) erhält man

$$(10) \quad r'(z_1) = C \cdot \frac{J'(z_1)}{J'(z)} \cdot r'(z)$$

Aus den Gleichungen (7) ergibt sich ferner

$$(11) \quad \left[q'(z) - \frac{1}{3} \frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9} p'(z)^2 \right]^3 \cdot \frac{C^2}{J'(z)^2} = \\ = \left[q'(z_1) - \frac{1}{3} \frac{dp'(z_1)}{dz_1} - \frac{2}{9} p'(z_1)^2 \right]^3 \cdot \frac{1}{J'(z_1)^2}$$

Da der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A) gemäss J' Wurzel einer rationalen Function ist, so findet demnach nach Gleichung (10) oder (11) zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung statt, *wenn nicht*

$$(12) \quad \left[q'(z) - \frac{1}{3} \frac{dp'(z)}{dz} - \frac{2}{9} p'(z)^2 \right]^3 = C' \cdot J'(z)^2$$

und zugleich

$$(13) \quad r'(z) = C'' \cdot J'(z),$$

wo C' und C'' Constanten bedeuten.

Nach Gl. (9) ist

$$(14) \quad p'(z) = -\frac{d \log J'(z)}{dz}$$

und aus Gl. (12) ergibt sich

$$(15) \quad q'(z) = -\frac{1}{3} \frac{d^2 \log J'}{dz^2} + \frac{2}{9} \left(\frac{d \log J'}{dz} \right)^2 + \gamma \cdot J'^{\frac{2}{3}}$$

wo γ eine Constante bedeutet.

Setzt man

$$(16) \quad \frac{d \log v}{dz} = \omega,$$

so folgt aus Gleichung (A')

$$(17) \quad \frac{d^2 \omega}{dz^2} + 3 \frac{d\omega}{dz} \cdot \omega + \omega^3 + p'(z) \left[\frac{d\omega}{dz} + \omega^2 \right] + q'(z) \cdot \omega + r'(z) = 0$$

Die Gleichung (17) wird aber, unter der Voraussetzung dass $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ die durch die Gleichungen (14), (15), (13) gegebenen Werthe haben, befriedigt durch

$$(18) \quad \omega = \mu \cdot J(z)^{\frac{1}{3}}$$

wo μ eine Wurzel der Gleichung

$$(19) \quad \mu^3 + \gamma \cdot \mu + C'' = 0$$

Ist $C'' = 0$, so ist nach Gl. (13) $r'(z) = 0$.

In diesem Falle wird die Gleichung (A') befriedigt durch

$$v_1 = \int J^{\frac{1}{3}}(z) dz$$

Ein zweites Integral v_2 ergibt sich

$$v_2 = v_1^2 + \text{Const.}$$

Da ein drittes Integral $v_3 = 1$ genügt, so findet also in diesem Falle zwischen v_1 , v_2 , v_3 die Gleichung zweiten Grades

$$v_2 v_3 = v_1^2 + \text{Const. } v_3$$

statt.

Es kann $J'(z)$ nicht constant sein, da sonst nach den Gleichungen (13), (14), (15) $p'(z)$, $q'(z)$, $r'(z)$ constant wären, die Gleichung (A') also durch eine Function der Form e^{xz} befriedigt würde, wo x constant; dieses widerspricht aber der vorausgesetzten Natur der Gleichung (A). Es muss demnach J' für einen singulären Punkt a der Gleichung (A') oder für $z = \infty$ unendlich werden. Es wird aber die logarithmische Ableitung eines Integrals v der Gl. (A') nicht unendlich für $z = \infty$.

Wenn demnach C'' von Null verschieden ist, so folgt aus Gleichung (18) dass $\mathcal{A}'(z)$ nur für die singulären Punkte a der Gl. (A') unendlich werden kann. Nun aber ist $\omega(z-a) = (z-a) \frac{d \log v}{dz}$ für $z=a$ gleich einer rationalen Zahl.

Es sei daher in der Umgebung von $z=a$

$$\mathcal{A}'(z)^{\frac{1}{3}} = \alpha_0(z-a)^{-1} + \dots$$

alsdann muss nach Gleichung (18), $\mu\alpha_0$ eine rationale Zahl sein. Hieraus ergibt sich zunächst, dass γ nicht verschwinden darf, da sonst gleichzeitig $\mu\alpha_0$, $\mu\varepsilon\alpha_0$, $\mu\varepsilon^2\alpha_0$ rationale Zahlen sein müssten, wenn μ eine der Wurzeln der Gleichung $\mu^3 + C'' = 0$, ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bezeichnet; was nicht möglich ist.

Es ergibt sich daher aus den Gl. (12), (13)

$$(20) \quad r'(z) = g(z)^3,$$

wo $g(z)$ eine rationale Function von z bedeutet.

Der vorausgesetzten Natur der Gl. (A) zu Folge ist in der Umgebung eines singulären Punktes a der Gleichung (A')

$$r'(z) = \frac{\xi_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{\xi_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{\xi_{-1}}{(z-a)} + \xi_0 + \xi_1(z-a) + \dots$$

folglich ist, wenn a_1, a_2, \dots, a_x die Gesamtheit der singulären Punkte der Gleichung (A') bedeuten,

$$r'(z)(z-a_1)^3(z-a_2)^3 \dots (z-a_x)^3 = h(z)^3$$

wo $h(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet.

Aus demselben Grunde muss in der Umgebung von $z=\infty$

$$r'(z) = \frac{\tau_3}{z^3} + \frac{\tau_4}{z^4} + \dots$$

sein.

Also ist $r'(z) \cdot z^3$ für $z=\infty$ nicht unendlich, und demnach $h(z)$ höchstens vom Grade $x-1$, also

$$(21) \quad g(z) = \frac{h(z)}{(z-a_1) \dots (z-a_x)} = \frac{\varepsilon_1}{z-a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z-a_2} + \dots + \frac{\varepsilon_x}{z-a_x}$$

Aus den Gleichungen (13), (20), (21), (18) folgt demnach

$$\omega = \frac{\mu}{C^{\frac{1}{3}}} \left[\frac{\varepsilon_1}{z - a_1} + \frac{\varepsilon_2}{z - a_2} + \dots + \frac{\varepsilon_x}{z - a_x} \right]$$

Aus dem oben Bemerkten ergibt sich dass $\frac{\mu}{C^{\frac{1}{3}}} \cdot \varepsilon_i$ rationale Zahlen sind, und demnach

$$(22) \quad v = \left[(z - a_1)^{\varepsilon_1} (z - a_2)^{\varepsilon_2} \dots (z - a_x)^{\varepsilon_x} \right]^{\frac{\mu}{C^{\frac{1}{3}}}}$$

eine Wurzel einer rationalen Function darstellt.

Von den Wurzeln der Gleichung (19) sind wenigstens zwei μ_1, μ_2 von einander verschieden. Setzt man in (22) $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, so erhält man zwei Integrale von (A') v_1, v_2 , deren Quotient nicht constant. Substituirt man v_1, v_2 in Gl. (B'), so folgt, dass auch v_3 eine algebraische Function von z wird.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen folgt, dass die Gleichungen (12) und (13) nur stattfinden dürfen, wenn entweder $n = 2$ oder die Gleichung (A) algebraisch integrierbar ist.

Wir fanden oben, dass wenn die Gleichungen (12) und (13) nicht bestehen, zwischen z und z_1 eine algebraische Gleichung stattfindet. Ist daher η gegeben, so folgen aus Gl. (B) für ζ n Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Den n Werthepaaren $(\eta, \zeta_1), (\eta, \zeta_2), \dots, (\eta, \zeta_n)$ entspricht demnach nur eine endliche Anzahl von Werthen z , d. h.

Einem gegebenen Werthe von η entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen z . Es findet also eine Gleichung der Form

$$(23) \quad z^l + A_1 z^{l-1} + \dots + A_l = 0$$

statt, wo A_1, A_2, \dots, A_l eindeutige Functionen von η sind.

Setzt man in Gl. (A)

$$y = y_1 \int \omega dz,$$

so erhält man

$$\frac{d^3 \omega}{dz^3} + \left(\frac{3d \log y_1}{dz} + p \right) \frac{d\omega}{dz} + \left[\frac{3}{y_1} \frac{d^2 y_1}{dz^2} + 2p \frac{d \log y_1}{dz} + q \right] \omega = 0$$

Von dieser Gleichung bilden $\frac{d\eta}{dz}, \frac{d^2\zeta}{dz}$ ein Fundamentalsystem von Integralen.

Es ist also ⁽¹⁾

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2\zeta}{dz}\right) = \frac{J}{y_1^3},$$

wo

$$J = \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2y_3}{dz^2} = e^{-f_1 dz}$$

oder

$$(24) \quad \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3 \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{J}{y_1^3}$$

Durch die Substitution (3) gehe (B) in

$$(B'') \quad F(\eta, \zeta) = 0$$

über. Aus dieser Gleichung ergibt sich $\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}$ als rationale Function von η und ζ

$$(25) \quad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta, \zeta)$$

Aus Gleichung (4) folgt

$$(26) \quad y_1 = \sqrt[3n-6]{\frac{X(z)}{H_1(\eta, \zeta)}}$$

Also ergibt Gl. (24)

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{\sqrt[3]{J}}{\sqrt[3n-6]{X(z)}} \cdot \frac{\sqrt[3n-6]{G(\eta, \zeta)^{n-2}}}{\sqrt[3]{H_1(\eta, \zeta)}}$$

oder

$$(27) \quad \sqrt[3n-6]{\frac{J^{n-2}}{X(z)}} \cdot dz = \sqrt[3n-6]{\frac{G(\eta, \zeta)^{n-2}}{H_1(\eta, \zeta)}} d\eta$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass wenn η in einen willkürlichen Werth β einrückt, und b einen zugehörigen Werth von z bedeutet, in der Umgebung dieser Werthe zwischen z und η eine Gleichung besteht der Form

⁽¹⁾ S. meine Abh. B. 66 des Borch. Journ. p. 123

$$(28) \quad \sum_a e_a (z - \alpha)^{\frac{a}{\alpha}} = \sum_a e_a (\eta - \beta)^{\frac{a}{\beta}},$$

wo α, β positive ganze Zahlen bedeuten, und wo die unendlichen Reihen auf beiden Seiten nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten. Aus dieser Gleichung ergibt sich aber bekanntlich $z - b$ dargestellt

durch eine nach Potenzen von $(\eta - \beta)^{\frac{1}{\gamma}}$ fortschreitende Reihe, mit nur einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Grösse, wo γ eine positive ganze Zahl bedeutet. Daher kann z als Function von η nicht wesentlich singuläre Punkte besitzen. Derselbe Schluss gilt auch, wenn $\eta = \infty$ oder $z = \infty$ wird. In der Gleichung (23) sind demnach die Coefficienten *rationale* Functionen von η .

Es ist also η , folglich auch ζ eine algebraische Function von z , und die Gleichung (26) ergibt, dass y_1 die gleiche Eigenschaft besitzt.

Die vorhergehenden Schlüsse sind nur in dem Falle nicht zulässig, dass $n = 2$, weil alsdann $H(f)$ constant, und daher die Gleichung (4) nicht existirt.

Man erhält also den Satz:

Findet zwischen den Integralen der Gleichung (A) eine Gleichung (B) höheren als zweiten Grades statt, so ist die Gleichung (A) algebraisch integrierbar.

2.

Bezeichnen wir mit u_1, u_2, u_3 das y_1, y_2, y_3 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der zu (A) adjungirten Differentialgleichung

$$\frac{d^3 u}{dz^3} - \frac{d^2(pu)}{dz^2} + \frac{d(qu)}{dz} - ru = 0$$

derart dass

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(y_2 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_2}{dz} \right) \frac{1}{J} \\ u_2 &= \left(y_3 \frac{dy_1}{dz} - y_1 \frac{dy_3}{dz} \right) \frac{1}{J} \\ u_3 &= \left(y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz} \right) \frac{1}{J} \quad (1) \end{aligned}$$

(1) Vergleiche über die Definition adjungirter Differentialgleichungen meine Arbeit in BORCHARDTS Journ. B. 76, S. 183, und eine Arbeit des Herrn FROBENIUS in demselben Journ. B. 77, S. 245.

so folgt aus den Gleichungen

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} \cdot y_3 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dz} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{d^2 y_1}{dz^2} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{d^2 y_2}{dz^2} + \frac{\partial f}{\partial y_3} \frac{d^2 y_3}{dz^2} &= M \end{aligned} \right.$$

wo

$$M = - \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \left(\frac{dy_1}{dz} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \left(\frac{dy_2}{dz} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} \left(\frac{dy_3}{dz} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} \frac{dy_2}{dz} \frac{dy_3}{dz} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1} \frac{dy_3}{dz} \frac{dy_1}{dz} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{dy_1}{dz} \frac{dy_2}{dz} \right\}$$

$$(C) \quad \frac{\partial f}{\partial y_x} = M \cdot u_x, \quad x = 1, 2, 3.$$

Es sei allgemein $\phi(y_1, y_2, y_3)$ eine ganze rationale und homogene Function der Variablen y_1, y_2, y_3 , welche durch die Substitution

$$(2) \quad \alpha_{x1}y_1 + \alpha_{x2}y_2 + \alpha_{x3}y_3 \text{ für } y_x \quad (x = 1, 2, 3)$$

in $j\phi$ übergeführt wird, wo j eine von y_1, y_2, y_3 unabhängige Grösse, und bezeichnet man mit $\phi', \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_x} \right)'$ das was aus ϕ resp. $\frac{\partial \phi}{\partial y_x}$ nach Ausübung der Substitution (2) wird, so folgt aus der Gleichung

$$(3) \quad \phi' = j\phi$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_x} \right)' = j \left[\beta_{x1} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + \beta_{x2} \frac{\partial \phi}{\partial y_2} + \beta_{x3} \frac{\partial \phi}{\partial y_3} \right], \quad x = 1, 2, 3$$

wo β_{xi} die Elemente der zu (2) inversen Substitution bedeuten.

Irgend einem Umlaufe von z möge nun die auf y_1, y_2, y_3 , wenn diese Grössen wieder die Integrale der Gleichung (A) bedeuten, ausgeübte Substitution (2) entsprechen, so ist:

$$(5) \quad f(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \dots) = f' = jf(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante. Dieses ergibt sich daraus dass die Function f' mit der Function f wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung

(B) einen gemeinschaftlichen von f verschiedenen Factor nicht besitzen kann, während y_1, y_2, y_3 der Gleichung $f' = 0$ genügen müssen. Wenn demnach diese Functionen nicht bis auf einen constanten Factor identisch wären, so würden die beiden Gleichungen $f = 0, f' = 0$ constante Werthe der Verhältnisse $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ liefern, was nicht möglich ist.

Da die Gleichung (5) also erfüllt ist, so kann man in Gl. (4) $\phi = f$ setzen. Andererseits geht durch denselben Umlauf von z u_z in

$$\beta_{z1}u_1 + \beta_{z2}u_2 + \beta_{z3}u_3, \quad z = 1, 2, 3$$

über. Demnach führt die Gleichung (4) für $\phi = f$ zu dem Schlusse, dass M durch den genannten Umlauf von z in jM übergeht. Hieraus ergibt sich wie für $H(f)$ in vor. No:

dass M Wurzel einer rationalen Function von z ist.

Ist insbesondere $n = 2$, so ist $\frac{\partial f}{\partial y_z}$ als lineare homogene Function von y_1, y_2, y_3 , Integral der Gleichung (A). Es muss demnach, wenn man in (A) die Substitution

$$(6) \quad y = Mu$$

ausführt, die resultirende Differentialgleichung mit der adjungirten zur Gleichung (A) übereinstimmen. Dieses drückt sich durch die Gleichungen

$$\frac{3M' + pM}{M} = -p'$$

$$\frac{3M^{(2)} + 2pM' + qM}{M} = -2p' + q$$

$$\frac{M^{(3)} + pM^{(2)} + qM' + rM}{M} = -p^{(2)} + q' - r,$$

aus, wo die oberen Accente Ableitungen andeuten.

Von diesen liefert die erste

$$(7) \quad M = e^{\int p' dz}$$

Die zweite wird durch die Gleichung (7) von selbst erfüllt, während die dritte unter Anwendung der Gleichung (7) übergeht in:

$$(8) \quad 3r = -\frac{1}{3}p^{(2)} - \frac{2}{3}pp' - \frac{1}{27}p^3 + \frac{2}{3}pq + q'$$

Findet umgekehrt diese Gleichung statt, und wählt man M der Gleichung (7) gemäss, so ist die durch die Substitution (6) aus (A) entstehende Gleichung mit ihrer adjungirten identisch, und es folgt aus der Gleichung

$$(9) \quad \begin{aligned} y_x &= Mu_x \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

Demnach ist die Gleichung (8) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür dass zwischen y_1, y_2, y_3 eine homogene Gleichung zweiten Grades besteht.

Bestimmt man zwei Functionen p_1, p_0 aus den Gleichungen

$$(10) \quad 3p_1 = p, \quad 2p_1^2 + p'_1 + 4p_0 = q,$$

wo

$$p'_1 = \frac{dp_1}{dz},$$

so folgt aus Gleichung (8)

$$(11) \quad r = 4p_0p_1 + 2p'_0,$$

wo

$$p'_0 = \frac{dp_0}{dz}.$$

Die Gleichung (A) ist also in diesem Falle übereinstimmend mit

$$(12) \quad \frac{d^3y}{dz^3} + 3p_1 \frac{d^2y}{dz^2} + (2p_1^2 + p'_1 + 4p_0) \frac{dy}{dz} + (4p_0p_1 + 2p'_0)y = 0$$

Bestimmt man aber die Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals der Gl.:

$$(13) \quad \frac{d^2y}{dz^2} + p_1 \frac{dy}{dz} + p_0y = 0$$

genügt, so ergibt sich ebenfalls die Gl. (12).

Ist demnach $n = 2$, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit derjenigen Differentialgleichung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (13) genügt.⁽¹⁾

⁽¹⁾ Nach dem Ercheinen meines obengenannten Aufsatzes in den Sitzungsber. der Akad. 8 Juni 1882 machte mich Herr BRIOSCHI durch ein Schreiben vom 22 Juli des-

3.

Es seien die sämmtlichen Integrale der Gleichung

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dz^m} + f_1(z) \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \dots + f_m(z) y = 0$$

mit rationalen Coefficienten, algebraisch. Ferner werde vorausgesetzt, dass für einen willkürlichen Werth von z jeder Quotient zweier Integrale von (1) auf geeigneten Wegen in z_1 denselben Werth annehme wie in z . Alsdann muss das Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, \dots, y_m auf denselben Wegen in vy_1, vy_2, \dots, vy_m übergehen, wo v eine bestimmte Function von z .

Es möge

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m,$$

wo c_1, c_2, \dots, c_m willkürliche Constanten, der irreductiblen Gleichung

$$(2) \quad y^r + \varphi_1(z) y^{r-1} + \dots + \varphi_r(z) = 0$$

genügen, wo $\varphi_i(z)$ rationale Function von z . Dann ist der Voraussetzung gemäss

$$v^r y^r + \varphi_1(z_1) v^{r-1} y^{r-1} + \dots + \varphi_r(z_1) = 0$$

oder

$$(3) \quad y^r + \frac{\varphi_1(z_1)}{v} y^{r-1} + \dots + \frac{\varphi_r(z_1)}{v^r} = 0$$

Die Wurzeln der Gleichungen (2) und (3) sind übereinstimmend. Ist daher $\varphi_i(z)$ der erste Coefficient in (2) welcher nicht identisch verschwindet, so ist

$$\varphi_i(z) = \frac{\varphi_i(z_1)}{v^i}$$

selben Jahres auf eine in dem Bulletin de la société mathématique de France t. VII 1879 enthaltene Notiz aufmerksam, worin Herr BRIOSCHI auf einem von dem unsrigen verschiedenen Wege die Bedingungen herleitet, unter welchen eine Differentialgleichung dritter Ordnung durch die Quadrate der Integrale einer Diff. zweiter Ordnung befriedigt wird. In derselben Notiz leitet Herr BRIOSCHI auch die Bedingungen ab, dafür dass einer Gleichung vierter Ordnung die Cuben der Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung genügen.

oder

$$(4) \quad v^i = \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_i(z)}$$

Also ist, wenn man setzt

$$y = F(z)$$

$$\frac{F(z_1)^i}{\varphi_i(z_1)} = \frac{F(z)^i}{\varphi_i(z)}$$

oder

$$(5) \quad \left[\frac{F(z_1)}{\varphi_i(z_1)} \right]^i = \left[\frac{F(z)}{\varphi_i(z)} \right]^i$$

I. Setzt man also

$$(6) \quad y = \sqrt[i]{\varphi_i(z)} \cdot \omega$$

so genügt ω einer linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(7) \quad \frac{d^m \omega}{dz^m} + g_1(z) \frac{d^{m-1} \omega}{dz^{m-1}} + \dots + g_m(z) \omega = 0,$$

deren Integrale für z_1 auf geeigneten Wegen Werthe annehmen, welche sich von denen in z nur um eine und dieselbe Einheitswurzel als Factor unterscheiden.

Sind $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ genau die sämmtlichen Werthe, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (1) oder was dasselbe ist der Gleichung (7) in $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ je einen gleichen Werth annimmt wie in z , so erhält ein willkürliches Integral der Gleichung (7) auf denselben Wegen in $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ Werthe, die sich von dem Werthe desselben in z nur durch Einheitswurzeln als Factoren unterscheiden.

II. Es sei

$$(8) \quad t = (\alpha - z)(\alpha - z_1) \dots (\alpha - z_{\sigma-1}) = \varphi(z, \alpha)$$

wo α eine willkürliche Grösse ist, so ist $\varphi(z, \alpha)$ eine rationale Function von z .

Denn da $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ die Gesamtheit der Werthe darstellt, welche jedem Quotienten zweier Integrale der Gl. (1) denselben Werth verschaffen wie für z , so können durch irgend einen Umlauf von z nur

$z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ eine Vertauschung unter einander erfahren. Da überdiess vorausgesetzt ist, dass Gl. (1) algebraisch integrirbar sei, so sind $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ von z algebraisch abhängig, daher ist t eine algebraische Function von z , welche durch Umläufe von z nicht verändert wird, d. h. eine rationale Function von z .

III. Die Function $\varphi(z, \alpha)$ hat die Eigenschaft

$$(9) \quad \varphi(z_x, \alpha) = \varphi(z, \alpha).$$

Denn es möge für $z = z_x, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ resp. in $z'_1, z'_2, \dots, z'_{\sigma-1}$ übergehen. Wenn nicht $z_x, z'_1, z'_2, \dots, z'_{\sigma-1}$ abgesehen von der Reihenfolge mit $z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}, z$ übereinstimmen, so müsste jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (1) für mehr als σ Werthe von z je einen gleichen Werth annehmen, gegen unsere Voraussetzung.

IV. Zu einem bestimmten willkürlichen Werthe von t der Gleichung (8) gehören genau die Werthe $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ von z .

In der That wird nach Satz III die Gleichung

$$t = \varphi(z, \alpha)$$

durch $z = z, z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_{\sigma-1}$ befriedigt. Ist andererseits z' ein von diesen verschiedener Werth von z , so kann nicht die Gleichung

$$\varphi(z, \alpha) = \varphi(z', \alpha)$$

bestehen, wegen der Willkürlichkeit von α .

Durch einen beliebigen Umlauf von t muss dem Satze IV gemäss z in einen der Werthe $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ übergehen. Ist $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7) zugehörig dem Werthenpaare (t, z) , so erhält ω_x durch einen beliebigen Umlauf von t , d. h. dem Werthenpaare (t, z_x) entsprechend, nach Satz I den Werth ω'_x

$$(10) \quad \omega'_x = j[\alpha_{x1}\omega_1 + \dots + \alpha_{xm}\omega_m], \quad x = 1, 2, \dots, m$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Transformiren wir daher die Gleichung (7) in eine Gleichung

$$(11) \quad \frac{d^m \omega}{dt^m} + h_1(t) \frac{d^{m-1} \omega}{dt^{m-1}} + \dots + h_m(t) \cdot \omega = 0$$

mit der unabhängigen Variablen t .

Nun ist⁽¹⁾ für das Werthsystem (t, z)

$$(12) \quad h_i(t) = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

wo

$$\Delta = \sum \pm \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz} \frac{d^2\omega_3}{dz^2} \dots \frac{d^{m-1}\omega_m}{dz^{m-1}}$$

und Δ_i aus Δ hervorgeht, wenn man die $m - i^{te}$ Horizontalreihe in Δ durch $\frac{d^m\omega_1}{dz^m}, \frac{d^m\omega_2}{dz^m}, \dots, \frac{d^m\omega_m}{dz^m}$ ersetzt.

In gleicher Weise ist für (t, z_x)

$$(13) \quad h_i(t) = -\frac{\Delta'_i}{\Delta'},$$

wo Δ' und Δ'_i aus Δ resp. Δ_i erhalten werden, wenn man ω_x durch ω'_x ersetzt. Aus Gleichung (10) ergibt sich aber:

$$(14) \quad \frac{\Delta'_i}{\Delta'} = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

das heisst:

V. Die Coefficienten der Differentialgleichung (11) sind rationale Functionen von t .

VI. Ist t ein willkürlicher Werth, so giebt es **nicht** einen davon verschiedenen Werth t_1 von der Beschaffenheit, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) auf geeigneten Wegen je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Wenn nämlich jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (11) in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kommt dieselbe Eigenschaft jedem Quotienten zweier Integrale der Gleichung (7) zu. Dieses ist jedoch nicht möglich. Denn es mögen dem willkürlichen Werthe t die Werthe $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ von z nach Gl. (8) entsprechen. Alsdann sind die dem Werthe t_1 nach derselben Gleichung entsprechenden Werthe $z', z'_1, z'_2, \dots, z'_{\sigma-1}$ von z sämmtlich von den Werthen $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}$ verschieden. Wäre nämlich einer der ersteren mit z_x übereinstimmend, so wäre

$$t_1 = \varphi(z_x, \alpha) = \varphi(z, \alpha) = t$$

(1) Siehe meine Arbeit B. 66 des Borch. Journ. S. 143.

nach Satz III. Es müsste demnach für das Werthsystem $z, z_1, z_2, \dots, z_{\sigma-1}, z'_1, z'_2, \dots, z'_{\sigma-1}$ jeder Quotient zweier Integrale je einen gleichen Werth annehmen. Der Voraussetzung gemäss soll dieses nur für σ Werthe stattfinden.

Es seien $U_0, U_1, \dots, U_{\sigma-1}$ die Umläufe von z , für welche ein willkürliches Integral der Gleichung (1), y resp. in $y, y', y'', \dots, y^{(r-1)}$ übergeht, derart dass nicht der Quotient zweier dieser Werthe constant, während jeder andere Umlauf von z jeden dieser Werthe nur in einen derselben mit einem constanten Factor multiplicirten Werthe überführt.

Im Anschluss an eine Bezeichnung, welche ich in meiner Arbeit über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen zweiter Ordnung⁽¹⁾ eingeführt habe, will ich im Folgenden $y, y', y'', \dots, y^{(r-1)}$ ein *reducirtes Werthsystem* des Integrals y nennen. Die Elemente eines reducirten Werthsystems sind demnach nur bis auf Einheitswurzeln als Factoren bestimmt.

Ein Umlauf s von t führe z in z_x über auf einem Wege S , welcher das allgemeine Integral ω in $j\omega$ verwandle, wo j eine Einheitswurzel, so werden die Wege $SU_0, SU_1, SU_2, \dots, SU_{\sigma-1}$ ω resp. in $j\omega, j\omega', j\omega'', \dots, j\omega^{(r-1)}$ verwandeln, wo SU_x den aus S und U_x zusammengesetzten Weg von z bezeichnet, und wo nach Satz I $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(r-1)}$ abgesehen von Einheitswurzeln als Factoren durch dieselben Substitutionen aus $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ hervorgehen wie $y, y', \dots, y^{(r-1)}$ aus y_1, y_2, \dots, y_m . Die Wege $SU_0, SU_1, \dots, SU_{\sigma-1}$ bringen alle denselben Werth von t hervor, und die Quotienten zweier der Werthe $j\omega, j\omega', \dots, j\omega^{(r-1)}$ sind nicht constant. Alle anderen Wege, welche von z nach z_x überführen, bringen nur Werthe von ω hervor, welche von den zuletzt genannten sich um constante Factoren unterscheiden. Also alle Umläufe von t , welche von z in z_x überführen, bringen genau r Werthe hervor, deren Quotienten nicht constant. Die Umläufe von t aber, welche von z nach z_l führen, wo l von x verschieden, bringen nach demselben Schlusse nur Werthe $j'\omega, j'\omega', j'\omega'', \dots, j'\omega^{(r-1)}$ hervor, wo j' eine von j verschiedene Einheitswurzel sein kann. Dasselbe gilt von den Umläufen von t , welche z_x in sich selbst überführen. Demnach ist $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(r-1)}$ ein *reducirtes Werthsystem* des willkürlichen Integrals ω der Gleichung (11), und man erhält den Satz:

VII. *Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines*

⁽¹⁾ Borch. Journ. B. 81, S. 111.

willkürlichen Integrals der Gleichung (11) ist übereinstimmend mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems eines willkürlichen Integrals der Gleichung (1).

4.

I. Es sei W ein Umlauf der unabhängigen Variablen z , durch welchen jeder Quotient zweier Integrale der beliebigen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \dots + p_m y = 0$$

mit rationalen Coefficienten unverändert bleibt, so wird durch denselben Umlauf jedes Integral in sich selbst multiplicirt mit einer und derselben Constanten übergeführt.

Es sei in der That y_1, y_2, \dots, y_m ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1), so ist

$$(2) \quad \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \dots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}} = e^{-f_1 dz} \quad (1)$$

Der Voraussetzung gemäss gehen nach Vollzug des Umlaufes W die Integrale y_1, y_2, \dots, y_m resp. in $y_1 v, y_2 v, \dots, y_m v$ über. Daher ist nach Gleichung (2)

$$(3) \quad \sum \pm (v y_1) \frac{d(v y_2)}{dz} \frac{d^2(v y_3)}{dz^2} \dots \frac{d^{m-1}(v y_m)}{dz^{m-1}} = j e^{-f_1 dz}$$

wo j eine Constante bedeutet. Nun aber ergibt sich identisch

$$(4) \quad \sum \pm (v y_1) \frac{d(v y_2)}{dz} \dots \frac{d^{m-1}(v y_m)}{dz^m} = v^m \sum \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \dots \frac{d^{m-1} y_m}{dz^{m-1}}$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (4) folgt demnach

$$(5) \quad v^m = j$$

womit unser Satz erwiesen ist.

(1) S. meine Abhandlung B. 66 des Borch. Journ. S. 128.

Es sei die Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{d^m v}{dt^m} + q_1(t) \frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}} + \dots + q_m(t) \cdot v = 0$$

mit in t rationalen Coefficienten, von welchen der mit $\frac{d^{m-1} v}{dt^{m-1}}$ multiplicirte verschwindet, algebraisch integrirbar. Setzt man

$$t = \frac{1}{\xi}$$

so verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$(6a) \quad \frac{d^m v}{d\xi^m} \cdot \xi^{2m} + m(m-1) \frac{d^{m-1} v}{d\xi^{m-1}} \cdot \xi^{2m-1} + \dots = 0$$

Bezeichnen wir mit s_1, s_2, \dots, s_m die Wurzeln der zu $t = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ergibt sich aus Gl. (6a)

$$(7) \quad s_1 + s_2 + \dots + s_m = -\frac{m(m-1)}{2}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass wenigstens eine der Grössen s_1, s_2, \dots, s_m negativ und absolut grösser als $\frac{m-1}{2}$, da nicht zwei derselben einander gleich sein können in Folge der Voraussetzung, dass Gleichung (6) algebraisch integrirbar.⁽¹⁾

Ein willkürliches Integral v der Gleichung (6) hat die Form

$$(8) \quad v = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_m \eta_m,$$

wo c_1, c_2, \dots, c_m willkürliche Constanten, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ das zu $t = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen bedeuten. Daher ist v für $t = \infty$ unendlich wie eine Potenz t^r , deren Exponent r grösser als $\frac{m-1}{2}$.

Nach einem beliebigen Umlaufe von t gehe v über in v' , wo

$$(9) \quad \begin{aligned} v' &= c'_1 \eta_1 + c'_2 \eta_2 + \dots + c'_m \eta_m \\ c'_x &= c_1 a_{1x} + c_2 a_{2x} + \dots + c_m a_{mx}, \end{aligned}$$

(¹) S. meine Abhdl. Borch. Journ. B. 66, S. 157.

wenn durch denselben Umlauf η_x in η'_x übergeführt wird, wo

$$\eta'_x = \alpha_{x1}\eta_1 + \alpha_{x2}\eta_2 + \cdots + \alpha_{xm}\eta_m.$$

Da die Grössen c_1, c_2, \dots, c_m willkürlich angenommen wurden und die Determinante der Grössen α_{ix} nicht verschwindet, so kann man c_1, c_2, \dots, c_m so wählen, dass auch in v' das Glied, welches wie t^r unendlich wird, nicht herausfällt. Daher ist auch v' für $t = \infty$ unendlich wie t^r .

Bildet man daher das Product der μ verschiedenen Werthe von v , welche allen Umläufen von t entsprechen, so ist dasselbe für $t = \infty$ unendlich wie $t^{r\mu}$. Es ist daher die irreductible algebraische Gleichung, welcher das allgemeine Integral v genügt, mindestens vom Grade $r\mu$, also höheren als $\frac{\mu(m-1)}{2}$ Grades in Bezug auf t .

Wir wollen jetzt von der Gleichung (6) voraussetzen, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt, von der Beschaffenheit, dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale derselben Gleichung je einen gleichen Werth wie in t annehmen könnte.

Es mögen nun einem beliebigen Werthe eines willkürlichen Integrals v_1 der Gl. (6) ξ verschiedene Werthe von t , nämlich $t, t_1, t_2, \dots, t_{\xi-1}$ entsprechen. Alsdann gehören zwei Werthenpaaren $(v_1, t_x), (v_1, t_l)$, wo $x \leq l$ zwei verschiedene Werthe eines von v_1 verschiedenen willkürlichen Integrals v_2 zu, da sonst jeder Quotient zweier Integrale für zwei verschiedene Werthe von t gleiche Werthe annehmen müsste, gegen unsere Voraussetzung. Demnach entsprechen einem Werthe von v_1 genau ξ Werthe von v_2 , und einem Werthe von v_2 genau ξ Werthe von v_1 , und es findet zwischen v_1, v_2 eine irreductible algebraische Gleichung

$$(10) \quad \varphi(v_1, v_2) = 0$$

statt, vom Grade ξ sowohl in Bezug auf v_1 als auch in Bezug auf v_2 . Da v_1, v_2 nur gleichzeitig, nämlich für singuläre Punkte der Gl. (6) oder für $t = \infty$ unendlich werden, so ist der Coefficient von v_1^ξ eine Constante, die Coefficienten aller übrigen Potenzen von v_1 ganze rationale Functionen von v_2 , und zwar der Coefficient von v_1^0 vom Grade ξ in v_2 , die übrigen Coefficienten von niedrigerem Grade in v_2 . Umgekehrt ist der Coefficient von v_2^ξ eine Constante, die Coefficienten der übrigen Potenzen von v_2 ganze rationale Functionen von v_1 , der Coefficient von v_2^0 vom

Grade ξ in v_1 , die übrigen Coefficienten vom niedrigeren Grade in v_1 . Wir setzen zunächst voraus, dass nicht für einen Werth von t jedes willkürliche Integral verschwinde. Dann enthält die Gleichung (10) ein von v_1, v_2 freies Glied.

Wir substituiren nun in Gl. (10)

$$(11) \quad v_2 = v_1 u,$$

wodurch diese Gleichung in

$$(12) \quad \phi(u, v_1) = 0$$

übergeführt werde. Die Gleichung (12) ist sowohl in Bezug auf u als auch in Bezug auf v_1 vom Grade ξ . Da die Gleichung (12) in Bezug auf v_1, v_2 irreductibel ist, so kommt diese Eigenschaft auch der Gleichung (12) in Bezug auf u und v_1 zu. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von u genau ξ Werthe von v_1 .

Wenn es Umläufe von t giebt, welche ein willkürliches Integral v der Gl. (6) in jv überführen, so ist nach Satz I j eine Constante, und zwar, weil v eine algebraische Function von z , eine Einheitswurzel. Die zu allen solchen Umläufen gehörigen Werthe von j genügen daher einer Gleichung

$$(13) \quad x^\lambda = 1$$

wo λ eine ganze Zahl.

Nach Satz I werden v_1^λ und u durch dieselben Umläufe von t verändert und nicht verändert, daher ist v_1^λ eine rationale Function von t und u . Es mögen nun einem willkürlichen Werth von u α verschiedene Werthe von t entsprechen, so entsprechen also demselben Werthe von u höchstens $\lambda\alpha$ verschiedene Werthe von v_1 . Es ist also

$$(14) \quad \lambda\alpha \geq \xi.$$

Nach einem Satze meiner Abhandlung über algebraisch integrirbare Differentialgleichungen⁽¹⁾ haben die Exponenten von v_1 in der irreductiblen Gleichung zwischen v_1 und t den grössten gemeinschaftlichen Theiler λ .

(¹) S. Borch. Journ. B. 81, p. 112.

Ist daher ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des willkürlichen Integrals v_1 , so ist

$$(15) \quad \mu = \lambda \cdot \nu$$

Nach den obigen Entwicklungen ist

$$(16) \quad \xi > \frac{\mu(m-1)}{2}$$

Aus den Gleichungen (14), (15), (16) ergibt sich demnach

$$(17) \quad \alpha > \frac{\nu(m-1)}{2}$$

Wenn es Werthe von t giebt, für welche jedes Integral der Gleichung (6) verschwindet, so gehören dieselben zu den singulären Punkten dieser Gleichung.

Es sei in diesem Falle

$$(18) \quad \omega_1 = v_1 + z_1, \quad \omega_2 = v_2 + z_2,$$

wo z_1, z_2 willkürliche Constanten bedeuten. Die Functionen ω_1, ω_2 werden für $t = \infty$ und für diejenigen singulären Punkte der Gleichung (6) für welche v_1, v_2 unendlich werden, gleichzeitig unendlich. Für die singulären Punkte derselben Gleichung, für welche v_1, v_2 gleichzeitig verschwinden, erhalten sie die von Null verschiedenen Werthe z_1, z_2 . Sie werden aber auch nicht für irgend einen anderen Werth von t gleichzeitig Null, da man z_2 so wählen kann, dass für diejenigen Werthe von t , für welche v_1 den Werth $-z_1$ erhält, v_2 nicht gleich $-z_2$ werde. Setzt man daher in Gl. (10) $\omega_1 - z_1, \omega_2 - z_2$ resp. für v_1, v_2 , so erhält man eine in Bezug auf ω_1, ω_2 irreductible Gleichung

$$(10a) \quad \varphi_1(\omega_1, \omega_2) = 0$$

vom Grade ξ sowohl in Bezug auf ω_1 als auch in Bezug auf ω_2 . Die Coefficienten von ω_2^ξ und von ω_1^ξ sind Constanten, während die Coefficienten der übrigen Potenzen von ω_1, ω_2 resp. in Bezug auf ω_2, ω_1 von niedrigerem Grade als dem ξ^{ten} sind. Die Gleichung (10a) enthält ein von ω_1, ω_2 freies Glied.

Setzt man daher in diese Gleichung

$$(11a) \quad \omega_2 = \nu \cdot \omega_1,$$

so geht sie in die in Bezug auf p und ω_1 irreductible Gleichung

$$(12\ a) \quad \phi_1(p, \omega_1) = 0$$

über, welche in Bezug auf jede der Variablen p und ω_1 vom Grade ξ ist. Es entsprechen daher einem willkürlichen Werthe von p genau ξ Werthe von ω_1 .

Da z_1, z_2 willkürlich gewählte Grössen bedeuten, so folgt, dass alle Umläufe von t , welche p ungeändert lassen, gleichzeitig v_1, v_2 also auch ω_1, ω_2 ungeändert lassen. Demnach ist ω_1 eine rationale Function von p und t . Ist daher β die Anzahl der verschiedenen Werthe von t , welche einem willkürlichen Werthe von p entsprechen, so ist die Anzahl der Werthe ω , welche demselben Werthe von p zugehören, nicht grösser als β . Demnach ist

$$(14\ a) \quad \xi \leq \beta$$

oder

$$(16\ a) \quad \beta > \frac{\mu(m-1)}{2}.$$

Die Anzahl der allen möglichen Umläufen von t entsprechenden Werthe von v_1 und v_2 , folglich auch von p ist gleich μ . Daher genügt p einer irreductiblen Gleichung

$$(19) \quad p^\mu + B_1 p^{\mu-1} + \dots + B_\mu = 0$$

Da einem willkürlichen Werthe von p β verschiedene Werthe von t entsprechen, so erhält p als rationale Function von t und v_1 an mindestens β Stellen der Riemannschen Fläche (t, v_1) einen gleichen Werth. Diese Function wird also auch in mindestens β Stellen dieser Fläche Null und unendlich. Da aber p nur für das System derjenigen endlichen nicht singulären Werthe von t unendlich wird, für welche ω_1 verschwindet, und nur für diejenigen endlichen nicht singulären Werthe von t Null wird, für welche ω_2 verschwindet, diese beiden Werthsysteme aber kein gemeinschaftliches Element besitzen, so folgt, dass

$$(20) \quad B_\mu = \frac{G(t)}{H(t)}$$

wo $G(t), H(t)$ ganze rationale Functionen, ohne gemeinschaftlichen Theiler, beide mindestens vom Grade β .

Nun sei

$$(19\ a) \quad u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \dots + A_\nu = 0$$

die irreductible Gleichung, welcher u genügt, und setzen wir

$$(20\ a) \quad A_\nu = \frac{G_1(t)}{H_1(t)}$$

wo $G_1(t)$, $H_1(t)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichen Theiler. Es bedeute ρ den höheren der beiden Grade derselben.

Setzt man in (19) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so wird $p = u$, und es werden je λ Wurzeln dieser Gleichung, welche solchen Umläufen von t entsprechen, durch die ein willkürliches Integral v der Gleichung (6) mit einer Einheitswurzel j multiplicirt wurde, einander gleich. Es ist demnach

$$(21) \quad (u^\nu + A_1 u^{\nu-1} + \dots + A_\nu)^\lambda = u^\mu + B_1^{(0)} u^{\mu-1} + \dots + B_\mu^{(0)},$$

wo $B_i^{(0)}$ den Werth von B_i für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$(22) \quad A_\nu^\lambda = B_\mu^{(0)}$$

Die Werthsysteme für welche p unendlich oder Null wird, gehen für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in Werthsysteme über, für welche u resp. unendlich oder Null wird. Da u nur für endliche nicht singuläre Werthe von t unendlich oder Null wird, so enthalten auch die beiden letzteren Werthsysteme kein gemeinschaftliches Element. Bezeichnet man daher mit $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ die Resultate der Substitution von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in $G(t)$, $H(t)$, so haben $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, und es folgt aus Gl. (22) oder

$$\left[\frac{G_1(t)}{H_1(t)} \right]^\lambda = \frac{G^{(0)}(t)}{H^{(0)}(t)}$$

dass die Grade von $G^{(0)}(t)$, $H^{(0)}(t)$ genau das λ -fache resp. vom Grade von $G_1(t)$, $H_1(t)$ sind. Daher ist

$$\lambda \rho \geq \mu,$$

also nach Gleichung (16 a)

$$(23) \quad \rho > \frac{\nu(m-1)}{2}$$

Aus (17) und (23) folgt, dass die Anzahl der verschiedenen Werthe von t , welche einem willkürlichen Werthe von u entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist.

Ist

$$(24) \quad \frac{d^m y}{dt^m} + h_1(t) \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + h_m(t) y = 0$$

eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche nur algebraische Integrale besitzt. Setzt man

$$(25) \quad y = e^{-\frac{1}{m} \int h_1(t) dt} \cdot v$$

so erhält man für v eine wie (6) beschaffene Differentialgleichung.

Setzen wir voraus, dass für einen willkürlichen Werth von t nicht ein zweiter Werth t_1 existirt von der Beschaffenheit dass auf geeigneten Wegen jeder Quotient zweier Integrale der Gleichung (24) in t_1 denselben Werth wie in t annehme, so besitzt die wie Gl. (6) beschaffene Gleichung dieselbe Eigenschaft. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen Werthe von t , welche dem Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$, wenn ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals dieser Gleichung bedeutet. Aus Gl. (25) ergibt sich, dass ν auch die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet. Da andererseits für zwei Werthe von t , für welche ein Quotient zweier willkürlicher Integrale der wie (6) beschaffenen Gleichung gleiche Werthe annimmt, auch der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (24) gleiche Werthe erhält, und umgekehrt, so folgt, dass auch die Anzahl der verschiedenen Werthe von t , welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale der Gleichung (24) entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$ ist, wo ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (24) bedeutet.

Unter Berücksichtigung der Sätze I, VI, VII der N° 3 erhält man daher das folgende Theorem.

II. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals einer beliebigen linearen homogenen algebraisch integrir-

baren Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist die Anzahl der verschiedenen Werthe der unabhängigen Variablen, welche einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlichen Integrale derselben Differentialgleichung entsprechen, grösser als $\frac{\nu(m-1)}{2}$.

5.

Wir betrachten die Gleichung (B) als eine algebraische Gleichung zwischen η , ζ , und bezeichnen nach RIEMANN mit p die Classe dieser algebraischen Gleichung, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu derselben gehören.

Seien J_1, J_2, \dots, J_p solche linear unabhängige Integrale erster Gattung, in der Form, welche nach dem Vorgange des Herrn ARONHOLD⁽¹⁾ von CLEBSCH und Herrn GORDAN⁽²⁾ eingeführt worden ist, so dass also

$$(1) \quad dJ_x = \frac{\varphi_x(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_1 y_2 dy_3 \quad x = 1, \dots, p,$$

wo $\varphi_x = 0$ eine Curve $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die sämtlichen Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve (B) hindurchgeht.

Nach N° 2 ist

$$(2) \quad \sum \pm c_1 y_2 dy_3 = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) \Delta dz$$

und nach Gleichung (C)

$$(3) \quad c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3) M$$

folglich ist

$$(4) \quad \frac{\sum \pm c_1 y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = \frac{\Delta}{M} dz$$

Nach N° 1 Gl. (24) ist

$$(5) \quad \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^3 \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = \frac{\Delta}{y_1^3}.$$

⁽¹⁾ Monatsberichte der K. Akademie der Wissensch. zu Berlin, April 1861.

⁽²⁾ Theorie der Abelschen Functionen, S. 2.

Andererseits ist nach Gl. (C)

$$(6) \quad \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\eta}{dz} = -\frac{u_2}{u_3} = -\frac{f_2}{f_3},$$

wenn man zur Abkürzung f_x für $\frac{\partial f}{\partial y_x}$ setzt. Bezeichnet man ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_x}$ mit f_{ix} , und mit F_{ix} den Coefficienten von f_{ix} in der Hessischen Covariante von f , so folgt

$$d \frac{d\zeta}{d\eta} = [F_{11}(y_2 dy_3 - y_3 dy_2) + F_{12}(y_3 dy_1 - y_1 dy_3) + F_{13}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1)] \cdot \frac{1}{(n-1)f_3^2}$$

also

$$\frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3)y_1^2}{u_3(n-1)f_3^2},$$

dennach nach Gl. (C)

$$\frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = \frac{(F_{11}f_1 + F_{12}f_2 + F_{13}f_3)y_1^2}{f_3^3(n-1)}$$

also endlich

$$(7) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{H(f)y_1^3}{f_3^3}$$

Substituirt man diesen Werth in (5) und setzt ausserdem für $\frac{d\eta}{dz}$ seinen Werth

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{J}{y_1^2 u_3} = \frac{J}{y_1^2} \cdot \frac{f_3}{M},$$

so folgt

$$(8) \quad \frac{1}{M^3} = \frac{(n-1)^2}{J^2 X(z)},$$

also ist nach Gl. (4)

$$(9) \quad \frac{\sum \pm c_i y_2 dy_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} = (n-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{J}{X}}$$

In den Gl. (4) und (9) sind J , M , X Wurzeln rationaler Functionen von z , und zwar hat X dieselbe Bedeutung wie in Gl. (2) N° 1, M dieselbe Bedeutung wie in Gl. (C), während

$$(10) \quad J = e^{-f p dz}$$

Durch einen beliebigen Umlauf von z möge y_x in y'_x übergehen, wo

$$(11) \quad y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \quad x = 1, 2, 3,$$

so genügen y'_1, y'_2, y'_3 der irreductiblen Gleichung

$$(12) \quad f(y'_1, y'_2, y'_3) = 0.$$

Es sind demnach $\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3) = 0$ Curven n — 3^{ter} Ordnung in y'_1, y'_2, y'_3 , welche durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von (12) hindurchgehen. Daher sind

$$J'_x = \int \frac{\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3) \sum c_i y'_i dy'_i}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} \quad x = 1, 2, \dots, p$$

die p linear unabhängigen Integrale erster Gattung, welche zu der Gleichung (12) gehören. Diese Integrale als Functionen von z sind demnach für keinen Werth von z unendlich. Setzt man für y'_1, y'_2, y'_3 ihre Werthe aus Gl. (11) in $\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3)$, so wird

$$\varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3) = \phi_x(y_1, y_2, y_3),$$

wo ϕ_x eine ganze rationale und homogene Function n — 3^{ten} Grades ist. Ferner hat man nach Gl. (4) oder Gl. (9)

$$\frac{\sum \pm c_i y'_i dy'_i}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y'_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y'_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y'_3}} = j \frac{\sum \pm c_i y_i dy_i}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

wo j eine Einheitswurzel bedeutet, folglich ist

$$J'_x = j \int \frac{\phi_x(y_1, y_2, y_3)}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}} \cdot \sum \pm c_i y_i dy_i$$

Da J'_x für keinen Werth von z , folglich auch für kein Werthsystem y_1, y_2, y_3 unendlich wird, so ist J'_x ein Integral erster Gattung gehörig zur Gleichung (B). Hieraus ergibt sich, dass $\phi_x(y_1, y_2, y_3) = \varphi_x(y'_1, y'_2, y'_3)$ durch eine lineare homogene Function von $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \dots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ dargestellt wird, oder

I. Die Functionen $\varphi_1(y_1, y_2, y_3), \dots, \varphi_p(y_1, y_2, y_3)$ genügen einer linearen homogenen Gleichung p^{ter} Ordnung

$$(D) \quad \frac{d^p \omega}{dz^p} + Q_1 \frac{d^{p-1} \omega}{dz^{p-1}} + \dots + Q_p \omega = 0$$

mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei U ein Umlauf der Variablen z , durch welchen ein Quotient λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) ungeändert bleibt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}, \frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, wo y'_1, y'_2, y'_3 die Functionen bedeuten, in welche resp. y_1, y_2, y_3 durch denselben Umlauf übergehen, nämlich

$$(13) \quad y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \quad x = 1, 2, 3.$$

Ist alsdann $y_1 = b_1, y_2 = b_2, y_3 = b_3$ ein Werthsystem, für welches λ Null oder Unendlich wird, und setzt man

$$(14) \quad b'_x = a_{x1}b_1 + a_{x2}b_2 + a_{x3}b_3, \quad x = 1, 2, 3.$$

so wird λ auch für $y_1 = b'_1, y_2 = b'_2, y_3 = b'_3$ Null resp. unendlich. Fixirt man daher $p-1$ willkürliche Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} von y_1, y_2, y_3 ($i = 1, 2, \dots, p-1$), für welche λ unendlich wird, so wird λ auch für die $p-1$ Werthsysteme

$$(15) \quad b'_{ix} = a_{x1}b_{i1} + a_{x2}b_{i2} + a_{x3}b_{i3}, \quad x = 1, 2, 3 \quad i = 1, 2, \dots, p-1$$

von y_1, y_2, y_3 unendlich.

Nach der Voraussetzung ist nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$. Andererseits ist auch nicht gleichzeitig $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l2}}{b'_{l1}}$ und $\frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b'_{l3}}{b'_{l1}}$ $l \geq i$ oder $\frac{b'_{i2}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l2}}{b_{l1}}, \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}} = \frac{b_{l3}}{b_{l1}}$, da man die Werthe von z , welche zu einem Systeme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und zu einem Systeme b_{l1}, b_{l2}, b_{l3} gehören, vollständig von einander unabhängig gewählt hat. Demnach constituiren die Werthsysteme b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} und die Werthsysteme $b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3}$ $2p-2$ verschiedene Werthsysteme, für welche λ unendlich wird.

Bezeichnet man die durch zweimalige Wiederholung der Substitution (13) aus b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} hervorgehenden Werthe mit $b''_{i1}, b''_{i2}, b''_{i3}$, so ist

erstlich *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, oder $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$, $i \geq l$, aus denselben Gründen wie oben. Andererseits ist auch, weil wir die zu b_{i1} , b_{i2} , b_{i3} gehörigen Werthe von z willkürlich gewählt haben, *nicht* gleichzeitig $\frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}$ und $\frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}}$, ohne dass auch gleichzeitig

$$(16) \quad \frac{b''_{i2}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}} \quad \text{und} \quad \frac{b''_{i3}}{b''_{i1}} = \frac{b_{i3}}{b_{i1}}$$

Da nun λ durch den Umlauf von U ungeändert bleibt, so muss diese Function auch für die Werthsysteme b''_{i1} , b''_{i2} , b''_{i3} unendlich werden. Nun aber kann λ ausser für die $2p - 2$ verschiedenen Werthsysteme (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}) , $(b'_{i1}, b'_{i2}, b'_{i3})$ nicht mehr unendlich werden, da bekanntlich der Quotient der Differentiale zweier Integrale erster Gattung der Classe p für nicht mehr als $2p - 2$ Stellen der RIEMANN'schen Fläche unendlich wird;⁽¹⁾ es müssen demnach die Gl. (16) stattfinden. Dieselben liefern wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{i1} , b_{i2} , b_{i3} gehörigen Werthe von z den Satz

II. *Giebt es einen Umlauf U von z , welcher y_1, y_2, y_3 überführt resp. in y'_1, y'_2, y'_3 , und zugleich den Quotienten λ zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) unverändert lässt, ohne dass gleichzeitig $\frac{y'_2}{y'_1} = \frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y'_3}{y'_1} = \frac{y_3}{y_1}$, so muss eine zweimalige Anwendung dieses Umlaufes $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ ungeändert lassen.*

Wenn ausser dem Umlaufe U noch ein anderer \bar{U} die Eigenschaft hat, dass durch dessen Anwendung λ ungeändert bleibt, ohne dass zugleich der Quotient zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) ungeändert bleibt, so ergibt sich wiederum aus dem Umstande, dass λ nur für $2p - 2$ Werthsysteme von y_1, y_2, y_3 unendlich werden kann, wenn man mit \bar{b}_{ix} den durch Anwendung der \bar{U} entsprechenden Substitution aus b_{ix} hergeleiteten Werth bezeichnet, dass

$$(17) \quad \frac{\bar{b}_{i2}}{\bar{b}_{i1}} = \frac{b'_{i2}}{b'_{i1}}, \quad \frac{\bar{b}_{i3}}{\bar{b}_{i1}} = \frac{b'_{i3}}{b'_{i1}},$$

⁽¹⁾ RIEMANN, Abelsche Functionen, in Borchardts Journ. B. 54.

d. h. wegen der willkürlichen Wahl der zu b_{ix} gehörigen Werthe von z , der Umlauf \bar{U} führt den Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gl. (A) in denselben Werth über wie U , oder was nach dem Satze I N° 4 dasselbe ist, der Umlauf \bar{U} führt y_1, y_2, y_3 resp. in jy'_1, jy'_2, jy'_3 über, wenn U dieselben Functionen resp. in y'_1, y'_2, y'_3 überführt, und wo j eine Einheitswurzel bedeutet.

Es seien $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{\sigma-1}$ diejenigen Umläufe von z , welche ein reducirtes Werthsystem eines willkürlichen Integrals ω der Gl. (D), nämlich $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ hervorbringen. Jeder andere Umlauf bringt also nur einen dieser Werthe mit einer Einheitswurzel multiplicirt hervor. Den Umläufen $S_0, S_1, \dots, S_{\sigma-1}$ entsprechen die Werthe $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ eines willkürlichen Integrals y der Gleichung (A). Es können nicht zwei der letztgenannten Werthe ein constantes Verhältniss besitzen, da sonst auch zwei entsprechende Werthe der Reihe $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ ein constantes Verhältniss hätten. — Die Umläufe $S_0 U, S_1 U, \dots, S_{\sigma-1} U$ erzeugen die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \dots, y^{(2\sigma-1)}$, während dieselben $\omega, \omega', \dots, \omega^{(\sigma-1)}$ nur mit constanten Factoren multipliciren. Die Werthe $y^{(\sigma)}, y^{(\sigma+1)}, \dots, y^{(2\sigma-1)}$ unterscheiden sich der Voraussetzung nach von $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ nicht bloss um constante Factoren. Jeder andere Umlauf von z bringt aber nach dem obigen nur Werthe hervor, welche gleich sind einem der Werthe der Reihe $y, y', y'', \dots, y^{(2\sigma-1)}$ multiplicirt mit einer Constanten. Diese letztere Reihe ist also ein reducirtes Werthsystem von y .

Giebt es aber keinen Umlauf der Art U , so ist $y, y', y'', \dots, y^{(\sigma-1)}$ ein reducirtes Werthsystem von y . Man erhält also den Satz

III. Ist ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A), so ist $\frac{1}{2}\nu$ oder ν die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (D), je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

Es seien (η_i, ζ_i) , $i = 1, 2, \dots, 2p - 2$ die $2p - 2$ Stellen der RIEMANN'schen Fläche (η, ζ) , in welchen λ einen willkürlich vorgeschriebenen Werth annimmt. Von diesen Stellen können $p - 1$ willkürlich gegeben sein. Wir bezeichnen die letzteren mit $(\eta_1, \zeta_1), \dots, (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$; dieselben können so gewählt werden, dass sie zu $p - 1$ verschiedenen Werthen von z gehören. Wenn zu einer der übrigen Stellen $(\eta_p, \zeta_p), \dots, (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ ein Werth von z gehört, welcher auch einer der ersteren $p - 1$ Stellen entspricht, wenn z. B. $(\eta_{p+x}, \zeta_{p+x})$ zu demselben z gehört, wie (η_i, ζ_i) , so

gäbe es einen Umlauf von z , welcher η_i, ζ_i resp. in η_{p+x}, ζ_{p+x} überführte. Da durch denselben Umlauf λ in sich selbst übergeführt wird, und bei willkürlicher Wahl von $(\eta_1, \zeta_1) \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ die Gleichungen $\eta_{p+x} = \eta_p, \zeta_{p+x} = \zeta_i$ nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wäre dieser Umlauf der Art U .

Giebt es also keinen Umlauf der Art U , so gehören zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(2p - 2)$ verschiedene Werthe von z , wenn man mit ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bezeichnet für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.

Wenn es aber einen Umlauf der Art U giebt, so mögen mit η', ζ' die Werthe bezeichnet werden, in welche derselbe η, ζ überführt. Es nimmt alsdann λ für $(\eta'_1, \zeta'_1), \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ denselben Werth an wie für $(\eta_1, \zeta_1), \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$. Da diese letzteren Stellen untereinander verschieden sind, so sind es auch die ersteren. Der Voraussetzung gemäss ist auch keiner der ersteren mit einem der letzteren übereinstimmend. Es fallen demnach $(\eta_p, \zeta_p), \dots (\eta_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ mit $(\eta'_1, \zeta'_1), \dots (\eta'_{p-1}, \zeta'_{p-1})$ zusammen. Da die Werthe von z , welche zu den verschiedenen Stellen $(\eta_1, \zeta_1), \dots (\eta_{p-1}, \zeta_{p-1})$ gehören, von einander verschieden sind, so ergibt sich, dass in dem Falle der Existenz eines Umlaufes der Art U zu einem willkürlichen Werthe von λ genau $\varepsilon(p - 1)$ verschiedene Werthe von z gehören. Man erhält also den Satz:

IV. Je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt, ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von z , welche zu einem willkürlichen Werthe des Quotienten zweier willkürlicher Integrale der Gleichung (D) gehören, $\varepsilon(p - 1)$ oder $2\varepsilon(p - 1)$, wenn ε die Anzahl der verschiedenen Werthe von z bedeutet, für welche gleichzeitig jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.

Besitzt die Gl. (A) die Eigenschaft, dass nicht zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so ist $\varepsilon = 1$. Es folgt alsdann nach Satz II N° 4, Satz III u. Satz IV dieser N°

$$(E) \quad p - 1 \geq \frac{p-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \nu$$

oder

$$2(p - 1) \geq \frac{p-1}{2} \cdot \nu$$

je nachdem es Umläufe der Art U giebt oder nicht giebt.

In beiden Fällen folgt für $p > 1$

$$(F) \quad \nu \leq 4.$$

Wenn zu einem willkürlichen Werthe z ein Werth z_1 gehört von der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) in z und z_1 je einen gleichen Werth annimmt, so kann man, da $n > 2$, also die Gleichung (A) algebraisch integrirbar vorausgesetzt ist, nach N° 3 durch Multiplication der abhängigen Variablen y mit einer Wurzel einer rationalen Function von z und Transformation der unabhängigen Variablen z in eine Veränderliche t die Gleichung (A) in eine Gleichung überführen der Form

$$(A'') \quad \frac{d^3\omega}{dt^3} + h_1(t) \frac{d^2\omega}{dt^2} + h_2(t) \frac{d\omega}{dt} + h_3(t)\omega = 0 \quad (\text{s. dort Gl. (11)})$$

mit rationalen Coefficienten, welche die Eigenschaft besitzt, dass *nicht* zu einem willkürlichen Werthe von t ein Werth t_1 gehört der Art, dass jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A'') in t und t_1 je einen gleichen Werth annimmt. (Satz VI N° 3).

Die Natur der Transformationen welche von (A) zu (A'') führen bringt es mit sich, dass die Gleichung (B) auch für ein Fundamentalsystem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ von Integralen der Gl. (A'') bestehen bleibt, dass also

$$(18) \quad f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$$

Bildet man die zu (18) gehörigen Integrale erster Gattung, so ist demnach die Anzahl der linear unabhängigen ebenfalls p . Da ferner nach Satz VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A'') mit der Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) übereinstimmt, so ergibt sich, dass die Gleichungen (E) und (F) auch bestehen bleiben, wenn für einen willkürlichen Werth von z und noch andere Werthe z_1 jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt.

Das durch (F) ausgedrückte Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

V. Ist die Classe p der Gleichung (B) grösser als Eins, so ist die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gleichung (A) nicht grösser als vier, oder, was dasselbe ist, die Anzahl

der reducirten Wurzeln⁽¹⁾ der algebraischen Gleichung, welcher dieses allgemeine Integral genügt, ist nicht grösser als vier.

6.

Für

$$p = 1$$

gehört zur Gl. (B) nur ein Integral erster Gattung J . Es sei wie in N° 5

$$(1) \quad dJ = \frac{\varphi(y_1, y_2, y_3) \sum \pm c_i y_i dy_i}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

Führt man auf der rechten Seite die Variablen η, ζ ein, so erhält man

$$(2) \quad dJ = \varphi_1(\eta, \zeta) d\eta$$

wo φ_1 eine rationale Function von η, ζ . Andererseits sind ζ und $\frac{d\eta}{dz}$ rationale Functionen von η, z . Folglich erhält man für die unabhängige Variable z

$$(3) \quad dJ = \psi(z, \eta) dz$$

wo ψ eine rationale Function von z, η .

Nach N° 5 wird entsprechend einem Umlauf von z , welcher y_1, y_2, y_3 resp. in y'_1, y'_2, y'_3 überführt,

$$(4) \quad \varphi(y'_1, y'_2, y'_3) = j\varphi(y_1, y_2, y_3),$$

wo j eine Constante und zwar, weil für $n > 2$ $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine algebraische Function von z ist, eine Einheitswurzel bedeutet. Demnach ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ eine Wurzel einer rationalen Function von z . Aus dieser Bemerkung und aus Gleichung (4) oder Gl. (9) N° 5 ergibt sich demnach, dass auch

$$(5) \quad dJ = R dz,$$

wo R Wurzel einer rationalen Function von z bedeutet.

⁽¹⁾ Ueber die Bedeutung dieser Bezeichnung s. meine Arbeit in Borchardt's Journal B. 81, S. 111, N° 9.

Setzen wir voraus, dass die Gleichung (A) so beschaffen sei, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth von z und noch für andere Werthe von z jeder Quotient zweier Integrale der Gl. (A) je einen gleichen Werth annimmt, so ist demnach z eine rationale Function von η, ζ . Da wir vorausgesetzt haben, dass J das zu (η, ζ) gehörige Integral erster Gattung sei, so sind η, ζ eindeutige Functionen von J , folglich ist auch z eine eindeutige Function von J .

Demnach ergibt sich aus dem Bestehen der Gleichung (5) nach den Untersuchungen der Herren BRIOT und BOUQUET,⁽¹⁾ dass R^4 oder R^6 eine rationale Function von z sein müsse.

Unter derselben Voraussetzung über die Gl. (A) ergibt sich auch, dass η, z eindeutige Functionen von J . Demnach ist auch die Classe der algebraischen Function η von z gleich Eins, und $\phi(z, \eta)$ nach Gleichung (3) die Ableitung des zu (z, η) gehörigen Integrals erster Gattung.

Der Ausdruck

$$\frac{\sum \pm c_i y_i dy_i}{c_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}}$$

bleibt ungeändert, wenn man an die Stelle von y_x setzt $b_{x1}y_1 + b_{x2}y_2 + b_{x3}y_3$, wo b_{xi} beliebige Constanten bedeuten, d. h. der genannte Ausdruck ist von der Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 unabhängig. Gleichermassen ist $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ bis auf einen constanten Factor von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig, folglich ist auch bis auf einen constanten Factor R von der Wahl dieses Fundamentalsystems unabhängig.

Aus (3) und (5) folgt

$$(6) \quad R = \phi(z, \eta)$$

d. h. es ist R eine rationale Function von η, z . Wir behaupten aber, dass auch umgekehrt η eine rationale Function von z, R ist. Denn gäbe es einen Umlauf von z , welcher R ungeändert liesse, dagegen η in η' verwandelte, so würde in den beiden Blättern η, η' der RIEMANN'schen Fläche der algebraischen Function η von z die Function R für dasselbe z denselben Werth annehmen. Wir können aber das Fundamentalsystem

⁽¹⁾ Journal de l'Ecole polytechnique t. 21, p. 222.

y_1, y_2, y_3 so wählen, dass für $z = z_1$, wo z_1 ein willkürlicher Werth, in den beiden genannten Blättern η denselben Werth η_1 erhält. Dann ist

$$(7) \quad \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta)} \phi(z, \eta) dz \equiv \int_{(z_1, \eta_1)}^{(z, \eta')} \phi(z, \eta) dz$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln, für Integrationswege, welche in den beiden Blättern η, η' übereinander laufen. Es ist demnach in der genannten RIEMANN'schen Fläche

$$(8) \quad \int_{(z, \eta)}^{(z, \eta')} \phi(z, \eta) dz \equiv 0$$

d. h. gleich bis auf Vielfache von Periodicitätsmoduln. Aus Gl. (8) folgt nach einem bekannten Satze, dass es eine rationale Function von z, η giebt, welche für einen beliebig gegebenen Werth und nur für diesen unendlich wird, dass demnach die Classe der algebraischen Function η von z gleich Null sei. Da aber nach dem oben Bewiesenen diese Classe gleich Eins, so folgt dass es keinen Umlauf von z giebt, welcher R ungeändert lässt, ohne gleichzeitig η ungeändert zu lassen, dass also η eine rationale Function von z, R ist.

Da eine gewisse Potenz jedes Integrals der Gleichung (A) eine rationale Function von η, z ist, so ergibt sich auch, dass eine gewisse Potenz jedes solchen Integrals durch eine rationale Function von z, R dargestellt werden kann.

Es ist daher, wenn λ eine gewisse ganze Zahl bedeutet,

$$(9) \quad y^\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \alpha_3 R^3, \text{ oder } y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 R + \dots + \beta_5 R^5,$$

je nachdem R^4 oder R^6 rationale Function von z wird, wenn man mit α_x und β_x rationale Functionen von z bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) wird daher durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Da nach S. VII N° 3 die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthsystems des allgemeinen Integrals der Gl. (A) stets gleich ist derselben Anzahl für eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass *nicht* für einen willkürlichen Werth der unabhän-

gigen Variablen und noch andere Werthe derselben jeder Quotient zweier Integrale derselben je einen gleichen Werth annimmt, und für welche gleichzeitig dieselbe Gleichung (B) erfüllt ist, so folgt allgemein der Satz:

I. Ist $p = 1$, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, durch eine der Zahlen 2, 3, 4, 6 gegeben.

Es sei endlich

$$p = 0.$$

Alsdann giebt es bekanntlich eine rationale Function s von η, ζ

$$(10) \quad s = \varphi(\eta, \zeta)$$

von der Beschaffenheit, dass

$$(11) \quad \eta = \frac{f_2(s)}{f_1(s)} \quad \zeta = \frac{f_3(s)}{f_1(s)},$$

wo $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ ganze rationale Functionen n^{ten} Grades der Variablen s , ohne einen allen gemeinschaftlichen Theiler.

Ein beliebiger Umlauf der Variablen z führe η, ζ resp. in η', ζ' über, so ist

$$(12) \quad \eta' = \frac{a_{21} + a_{22}\eta + a_{23}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta}, \quad \zeta' = \frac{a_{31} + a_{32}\eta + a_{33}\zeta}{a_{11} + a_{12}\eta + a_{13}\zeta}$$

Setzt man in die aus (11) sich ergebende Gleichung

$$s' = \varphi(\eta', \zeta'),$$

wo also s' den Werth bezeichnet in welchen s durch den genannten Umlauf übergeht, die Werthe aus (12) ein, so ergibt sich nach Gl. (11), dass s' eine rationale Function von s . Da aber auch umgekehrt s eine rationale Function von s' sein muss, so folgt:

Zwischen s und s' findet eine Gleichung der Form

$$(13) \quad as s' + bs + cs' + d = 0$$

statt, wo a, b, c, d Constanten sind.

Wir setzen

$$(14) \quad \hat{\zeta}_1^2 = \frac{dz}{ds}, \quad \hat{\zeta}_2 = \hat{\zeta}_1 \cdot s$$

Aus Gl. (13) folgt:

$$(15) \quad \frac{ds'}{dz} = \frac{bc - ad}{(as + c)^2} \frac{ds}{dz}.$$

Da s nicht constant, so ist $bc - ad$ von Null verschieden.

Nach dem genannten Umlaufe von z mögen ξ_1, ξ_2 resp. in ξ'_1, ξ'_2 übergehen, so ergibt sich aus (14) und (15)

$$\xi_1'^2 = \frac{dz}{ds'} = \frac{1}{bc - ad} (as + c)^2 \cdot \xi_1^2$$

$$\xi_2'^2 = \frac{1}{bc - ad} \cdot \xi_1^2 (bs + d)^2$$

also

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi_1' &= \frac{1}{\sqrt{bc - ad}} (a\xi_2 + c\xi_1) \\ \xi_2' &= \frac{1}{\sqrt{bc - ad}} (b\xi_2 + d\xi_1). \end{aligned}$$

Da aber s , folglich auch ξ_1, ξ_2 algebraische Functionen von z sind, so lässt sich dieses Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Es ist s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen algebraisch integrirbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung, mit der unabhängigen Variablen z und mit in z rationalen Coefficienten.

Es sei

$$(17) \quad f_x(s) \cdot \xi_1^n = \psi_x(\xi_1, \xi_2), \quad x = 1, 2, 3$$

wo ψ_x ganze rationale und homogene Functionen von ξ_1, ξ_2 n^{ten} Grades bedeuten.

Aus den Gleichungen (11) folgt alsdann

$$(18) \quad y_x = \rho \cdot \psi_x(\xi_1, \xi_2), \quad x = 1, 2, 3$$

Wenn nach einem Umlaufe von z , ρ, ξ_1, ξ_2, y_x resp. in $\rho', \xi'_1, \xi'_2, y'_x$ übergehen, so dass

$$y'_x = a_{x1}y_1 + a_{x2}y_2 + a_{x3}y_3, \quad x = 1, 2, 3$$

und nach Gl. (16)

$$\psi_x(\xi'_1, \xi'_2) = \chi_x(\xi_1, \xi_2),$$

wo χ_x ebenfalls eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades von ξ_1, ξ_2 bezeichnet, so ergibt sich aus (18)

$$(19) \quad \rho' \chi_x(\xi_1, \xi_2) = \rho[a_{x1}\psi'_1 + a_{x2}\psi'_2 + a_{x3}\psi'_3]$$

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine rationale Function von s .

Wenn die Function $\frac{\rho'}{\rho}$ für einen Werth von s verschwindet, so muss für denselben Werth

$$a_{x1}f_1 + a_{x2}f_2 + a_{x3}f_3 = 0 \quad \text{für } x = 1, 2, 3$$

sein, d. h. da die Determinante der Grössen a_{xi} nicht verschwindet

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

sein, was nicht möglich ist, da $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Demnach ist $\frac{\rho'}{\rho}$ eine Constante. Da aber ρ eine algebraische Function von z ist, so folgt, dass ρ Wurzel einer rationalen Function von z . Also

II. Im Falle $p = 0$ ist das allgemeine Integral der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als Factor durch eine ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, darstellbar ⁽¹⁾.

Betrachten wir nunmehr die Gl. (B) für den Fall $n = 2$.

Es sei

$$(20) \quad a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 = 0$$

diese Gleichung, so ergibt sich, wenn man mit η_0, ζ_0 ein beliebiges Werthsystem von η, ζ bezeichnet welches derselben genügt, und wenn man setzt

$$(21) \quad s = \frac{\zeta - \zeta_0}{\eta - \eta_0},$$

$$(22) \quad \eta = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{A_0 + A_1s + A_2s^2}, \quad \zeta = \frac{b'_0 + b'_1s + b'_2s^2}{A_0 + A_1s + A_2s^2}.$$

⁽¹⁾ Ueber solche Differentialgleichungen zweiter, Ordnung vergl. meine Abhandl. in Borch. Journ. B. 81, S. 97 und B. 85, S. 1.

Aus den Gl. (21), (22) ergibt sich analog wie aus den Gl. (10), (11), dass zwischen zwei Zweigen s und s' der Function s von z eine bilineare Gleichung von der Form (13) stattfindet.

Aus dieser Gleichung folgert man wie oben, dass s der Quotient zweier Integrale ξ_1, ξ_2 einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten ist, jedoch mit dem Unterschiede, dass hier die Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht algebraisch integrirbar zu sein braucht, da s nicht algebraisch sein muss. Auch für diesen Fall gelten die Gl. (18), und in diesen sind die Functionen ϕ_x ganze rationale Functionen zweiten Grades, während ρ constant wird. Dieses Resultat ist mit dem in N° 2 Gegebenen übereinstimmend.

7.

Für die lineare homogene Differentialgleichung (A), zwischen deren Integralen eine Gleichung (B) besteht, ergeben sich nach dem Vorhergehenden folgende-Resultate:

I. Ist der Grad n der Gleichung (B) gleich zwei, so ist die Gleichung (A) übereinstimmend mit der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher das Quadrat jedes Integrals einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügt.

II. Ist n grösser als zwei, so sind die Integrale der Gleichung (A) algebraische Functionen von z .

Hierbei ergeben sich drei Fälle:

a) Ist die Classe p der algebraischen Gleichung (B) grösser als Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, welcher das allgemeine Integral der Gleichung (A) genügt, nicht grösser als vier.

b) Ist p gleich Eins, so ist die Anzahl der reducirten Wurzeln zwei, drei, vier oder sechs.

c) Ist p gleich Null, so sind die Integrale der Gleichung (A) abgesehen von einer Wurzel einer rationalen Function als einem für alle gültigen Factor, rationale ganze und homogene Functionen n^{ten} Grades des Fundamentalsystems von Integralen ξ_1, ξ_2 einer algebraisch integrirbaren

linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Da jede algebraisch integrirbare Gleichung (A) die Eigenschaft hat, dass zwischen den Elementen des Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 eine Gleichung (B) besteht, so sind durch diese Resultate auch alle die Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt.

Heidelberg 1882.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

M. HEINE a fait voir que

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int e^z z^{a-1} dz$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, sans qu'il soit nécessaire que cette courbe soit fermée.

Dans une précédente lettre je vous ai exposé le résultat obtenu en intégrant le long de deux droites passant par l'origine. Ces résultats supposent que la partie réelle de $a > 0$.

Je vais prendre à présent pour contour d'intégration une parabole ayant pour foyer l'origine. L'équation de la parabole est

$$z = \frac{\cos \omega + i \sin \omega}{1 + \cos \omega}$$

d'où

$$dz = \frac{-\sin \omega + i(1 + \cos \omega)}{(1 + \cos \omega)^2} d\omega$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} e^z z^{a-1} dz &= \int_0^{\pi} e^{\frac{\cos \omega}{1 + \cos \omega}} \frac{1}{(1 + \cos \omega)^{a+1}} \\
 &\left| \begin{aligned} &[\cos(a-1)\omega + i \sin(a-1)\omega][-\sin \omega + i(1 + \cos \omega)] e^{\frac{i \tan \frac{\omega}{2}}{2}} \\ &+ [\cos(a-1)\omega - i \sin(a-1)\omega][\sin \omega + i(1 + \cos \omega)] e^{-\frac{i \tan \frac{\omega}{2}}{2}} \end{aligned} \right| d\omega \\
 &= 2ie^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\omega}{2}} \frac{1}{\left(2 \cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^{a+1}} \left| \begin{aligned} &-\left[\sin a\omega + \sin(a-1)\omega\right] \sin\left(\tan \frac{\omega}{2}\right) \\ &+ [\cos a\omega + \cos(a-1)\omega] \cos\left(\tan \frac{\omega}{2}\right) \end{aligned} \right| d\omega \\
 &= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\omega}{2}} \left(1 + \tan^2 \frac{\omega}{2}\right)^{a-\frac{1}{2}} \cos\left[(2a-1)\frac{\omega}{2} + \tan \frac{\omega}{2}\right] d\left(\tan \frac{\omega}{2}\right) \\
 &= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2} x^2} (1+x^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos[(2a-1) \arctan x + x] dx,
 \end{aligned}$$

par conséquent,

$$I'(a) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{a-1} \sin a\pi} \int_0^x e^{-\frac{1}{2} x^2} (1+x^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos[(2a-1) \arctan x + x] dx.$$

Si nous faisons $a = \frac{1}{2}$ et nous rappelant que $I(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, il viendra

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2} x^2} \cos x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}.$$

D'un autre côté on a

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On déduit de ces deux intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[V \sqrt{\frac{\pi}{2}} + V \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \right]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[V \sqrt{\frac{\pi}{2}} - V \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \right]$$

ou bien

$$\int_0^{\infty} e^{-2x^2} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \left[V \sqrt{\frac{\pi}{2}} + V \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \right]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2x^2} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \left[V \sqrt{\frac{\pi}{2}} - V \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \right]$$

De l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x dx = V \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$$

on peut déduire une série d'intégrales. L'intégration par parties donne

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x \sin x dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x \sin x dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x dx - \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^2 \cos x dx$$

d'où

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^2 \cos x dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x \sin x dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x dx.$$

Si, d'une manière générale, on pose

$$A_{2n} = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n} \cos x \, dx$$

$$A_{2n+1} = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n+1} \sin x \, dx$$

il viendra

$$A_{2n} = A_{2n+1} - 2n A_{2n-1}$$

$$A_{2n+1} = -A_{2n+2} + (2n+1) A_{2n}$$

Ces formules permettront de déduire ces intégrales les unes des autres.

Prenons, à présent, pour contour d'intégration une parabole ayant son sommet à l'origine, avec un petit cercle entourant cette origine, pour éviter ce point critique, nous rappelant que l'intégrale sur ce cercle est nulle lorsque la partie réelle de a est positive.

L'équation de la parabole est

$$z = \frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\cos \omega + i \sin \omega) = -\cot^2 \omega - i \cot \omega;$$

d'où

$$dz = \frac{2 \cos \omega + i \sin \omega}{\sin^3 \omega} d\omega.$$

Dès lors

$$\int_{\gamma} e^z z^{a-1} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{\sin^3 \omega} \left(\frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^{a-1} \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} & [\cos(a-1)\omega + i \sin(a-1)\omega][2 \cos \omega + i \sin \omega] e^{-i \cot \omega} \\ & - [\cos(a-1)\omega - i \sin(a-1)\omega][2 \cos \omega - i \sin \omega] e^{i \cot \omega} \end{aligned} \right\} d\omega$$

$$= 2i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{\sin^3 \omega} \left(\frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^{a-1} \left\{ \begin{aligned} & - [\cos a\omega + \cos \omega \cos(a-1)\omega] \sin(\cot \omega) \\ & + [\sin a\omega + \cos \omega \sin(a-1)\omega] \cos(\cot \omega) \end{aligned} \right\} d\omega$$

$$= 2i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{\sin^3 \omega} \left(\frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^{a-1} \{ \sin[a\omega - \cot \omega] + \cos \omega \sin[(a-1)\omega - \cot \omega] \} d\omega$$

$$\begin{aligned}
 &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{\sin^3 \omega} \left(\frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^{a-1} \{ 3 \sin [a\omega - \cot \omega] + \sin [(a-2)\omega - \cot \omega] \} d\omega \\
 &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{(\sin \omega)^a} (-\cot \omega)^{a-1} \{ 3 \sin [a\omega - \cot \omega] + \sin [(a-2)\omega - \cot \omega] \} \frac{d\omega}{\sin^2 \omega} \\
 &= i \int_0^{\infty} e^{-x^2} (1+x^2)^{\frac{a}{2}} x^{a-1} \{ 3 \sin [x + a \operatorname{arc} \cot(-x)] + \sin [x + (a-2) \operatorname{arc} \cot(-x)] \} dx
 \end{aligned}$$

Donc

$$I(a) = \frac{1}{2 \sin a\pi} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{a-1} (1+x^2)^{\frac{a}{2}} \cdot$$

$$\{ 3 \sin [x + a \operatorname{arc} \cot (-x)] + \sin [x + (a-2) \operatorname{arc} \cot (-x)] \} dx.$$

SUR UNE RELATION DONNÉE PAR M. CAYLEY. DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

CH. HERMITE.

Le n° d'Octobre 1882, du Bulletin des Sciences Mathématiques de M. DARBOUX, contient à la page 215, une équation intéressante pour la théorie des fonctions elliptiques, qui a été découverte par M. CAYLEY, et donnée par l'illustre géomètre sous la forme suivante. Supposons les quatre quantités u, v, r, s , assujetties à la condition

$$u + v + r + s = 0,$$

on aura :

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s$$

$$+ \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s$$

$$- \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = - \frac{k'^2}{k^2}$$

Cette équation remarquable se démontre facilement au moyen des formules dont je fais usage depuis longtemps dans mes leçons de la Sorbonne, et qui donnent la décomposition en éléments simples, des trois quantités :

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a), \quad \operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a), \quad \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a).$$

Soit

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

la première de ces formules, n'est autre que la relation fondamentale de JACOBI, à savoir:

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a} [Z(x) - Z(x + a) + Z(a)];$$

nous avons ensuite

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) = \operatorname{cn} a - \frac{\operatorname{dn} a}{k^2 \operatorname{sn} a} [Z(x) - Z(x + a) + Z(a)]$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) = \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a} [Z(x) - Z(x + a) + Z(a)].$$

Cela étant, si l'on fait $u = x$ et $r + s = a$, de sorte qu'on ait $v = -x - a$, la relation à établir devient

$$\begin{aligned} & k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \\ & + \operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \\ & - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

En employant maintenant les formules que je viens de rappeler, et posant pour abréger:

$$U = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a} [Z(x) - Z(x + a) - Z(a)]$$

on trouve

$$\begin{aligned} & U k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s (\operatorname{cn} a - U \operatorname{dn} a) \\ & - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \left(\frac{\operatorname{dn} a}{k^2} - U \operatorname{cn} a \right) = -\frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

ou bien:

$$\begin{aligned} & (k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a) U \\ & + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire voir que l'on a:

$$\begin{aligned} & k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{cn} a = 0 \\ & \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2} \end{aligned}$$

sous la condition $r + s = a$. Soit $r = -x$, et par conséquent $s = a + x$, les relations que nous obtenons ainsi, à savoir

$$k'^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) + \operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) - \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) \operatorname{dn} a = 0$$

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) \operatorname{cn} a - \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) \operatorname{dn} a = -\frac{k'^2}{k^2}$$

reviennent exactement à celles qui résultent des formules de décomposition en éléments simples que nous venons d'appliquer, en éliminant la quantité désignée par U . On trouve ainsi en effet:

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) \operatorname{dn} a$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) \operatorname{cn} a;$$

or en multipliant la première de ces égalités par $\operatorname{dn} a$, la seconde par $\operatorname{cn} a$, on en conclut, en retranchant membre à membre, la première des deux équations à établir. La suivante s'obtient par un calcul semblable, qui revient à l'élimination de la quantité $\operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a)$.

ZUR THEORIE DER DISCRIMINANTEN

VON

EUGEN NETTO

in BERLIN.

Die nachstehende Arbeit knüpft an Untersuchungen an, welche ich früher unter gleichem Titel im »Journal für reine und angewandte Mathematik« B. XC, 164—186 veröffentlicht habe. Der Grund, welcher mich bewog, auf diese Untersuchungen zurückzukommen, ist in einigen Bemerkungen, vorzüglich aber in den neuen, grundlegenden Anschauungen zu suchen, die sich in der bedeutenden Abhandlung des Herrn KRONECKER: »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen« finden. Zu jenen Bemerkungen zähle ich die (S. 22) gemachte Angabe einer Gleichung, für die es Wurzelgattungen ohne Gattungsdiscriminanten giebt; sie rief die Untersuchungen in § 5 und § 6 der nachfolgenden Arbeit hervor; — ferner den Satz auf S. 42 (§ 13) über Functionen einer Gattung, deren conjugirte sämmtlich von einander verschieden sind; sie veranlasste die Ableitungen in § 2.

Besonders aber waren es die im zweiten Teile der KRONECKER'schen Abhandlung auseinandergesetzten Principien über Divisorensysteme, welche mich bewogen, den einfachen Fall der Discriminanten algebraischer Gleichungen in dem neuen, überraschenden Lichte dieser tiefliegenden und doch ihrem Wesen nach so einfachen Grundanschauungen von neuem zu behandeln. Die algebraische und die substitutionentheoretische Methode der Untersuchung weisen sich hierbei, als in wichtigen Punkten einander ergänzend aus, so dass es nicht angethan schien, die eine zu Gunsten der anderen zu unterdrücken.

§ 1.

Es ist für unsere Untersuchungen ein Punkt von besonderer Wichtigkeit, dass auf die Natur der Discriminante

$$D_{\varphi} = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2 \cdots (\varphi_{\rho-1} - \varphi_{\rho})^2$$

einer gegebenen ρ -wertigen Function $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der n von einander unabhängigen Grössen x_1, x_2, \dots, x_n nur solche algebraischen Beziehungen von wesentlichem Einfluss sind, welche in der Gleichsetzung zweier oder mehrerer der Elemente x bestehen.

Um den Kern dieser Verhältnisse klarzulegen, müssen wir einige elementare und fundamentale Theoreme vorausschicken, deren Bedeutung darin liegt, dass zwischen vorher willkürlichen Grössen bestimmte algebraische Relationen eingeführt werden; dass also sogenannte »allgemeine« Sätze bei tatsächlich gegebenen Verhältnissen Anwendung finden sollen.

Wir verstehen unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ willkürliche Constanten, unter x_1, x_2, \dots, x_n vorläufig unbestimmte Grössen und betrachten die lineare Verbindung der x

$$(1) \quad \phi_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Bei allen möglichen Vertauschungen der x untereinander erhält ϕ_1 eine Reihe von Werten, die ihre Formen nach von einander verschieden sind. Die Operationen der Vertauschungen bezeichnen wir als Substitutionen; es giebt deren $n!$, falls man diejenige Substitution mitzählt, welche keins der x von seiner Stelle rückt. Es mögen $s_1, s_2, \dots, s_{n!}$ diese Substitutionen sein, und s_1 soll die letzt erwähnte identische Substitution bedeuten. Wir verstehen ferner unter ϕ_a denjenigen Wert von ϕ_1 , der durch die Anwendung von s_a aus ϕ_1 hervorgeht. (Setzen wir etwa

$$\chi_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

so sei auch hier χ_a der Wert von χ welcher durch s_a aus χ_1 hervorgerufen wird.) Der Index des Ausdruckes wird also durch die Substitution bestimmt.

Falls man für die x besondere Werte einsetzt, brauchen die $n!$ Ausdrücke ϕ_a ihren Werten nach nicht sämtlich von einander verschieden

zu sein. Sind einige der x untereinander gleich, so ist eine derartige Verschiedenheit nicht einmal mehr möglich. Über die hierbei eintretenden Umstände war bisher, meines Wissens, nur der folgende Satz bekannt: *Es können beliebige Beziehungen algebraischer Art zwischen x_1, x_2, \dots, x_n bestehen; so bald durch dieselben nur nicht die Gleichheit einiger der Elemente x festgesetzt wird, ist es stets möglich, beliebig viele Systeme $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ der Constanten α zu liefern, für welche alle $n!$ Ausdrücke $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n!$ ihren numerischen Werten nach von einander verschieden sind.*⁽¹⁾

Diesen Satz wollen wir erweitern und die neue Fassung beweisen. Die Erweiterung bezieht sich auf Folgendes: Wenn für Gleichsetzungen der x gewisse Gruppen von Werten der ϕ bei jeder Wahl der α einander gleich werden, dann kann der hierdurch bestimmte Charakter dadurch nicht geändert werden, dass man neue Beziehungen unter den x_1, \dots, x_n festlegt, welche keine neuen Gleichsetzungen der x zur Folge haben.

Wir setzen voraus, es wäre etwa

$$(A) \quad x_{a_1} = x_{a_2} = \dots = x_{a_\mu}; \quad x_{b_1} = x_{b_2} = \dots = x_{b_\nu}.$$

Dann werden ersichtlich von den $n!$ Ausdrücken $\phi_1, \dots, \phi_n!$ genau $\frac{n!}{\mu! \nu!} = \sigma$ Gruppen von je $\mu! \nu!$ Ausdrücken je einen und denselben Wert annehmen, so dass für ϕ höchstens σ verschiedene Werte bestehen können. Einem beliebigen ϕ_a werden nämlich alle diejenigen ϕ gleich, welche aus ihm durch Substitutionen hervorgehen, in denen nur $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_\mu}$ und ebenso $x_{b_1}, x_{b_2}, \dots, x_{b_\nu}$ unter sich vertauscht werden. Wir wollen diese Substitutionen, deren Anzahl $\mu! \nu!$ ist, zum Unterschiede von den übrigen mit t_1, t_2, t_3, \dots bezeichnen; wir behalten aus jeder der σ Gruppen einen Repräsentanten zurück, $\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_\sigma$. Jetzt nehmen wir weiter an, es träten neue Beziehungen unter den x auf, welche durch die irreductiblen Gleichungen

$$(B) \quad F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

dargestellt werden, und über deren Natur lediglich das Eine festgesetzt sei, dass durch sie *keine weiteren Gleichsetzungen* unter den x hervorgerufen werden. Dann lassen sich, wie die F_k auch sonst beschaffen sind,

⁽¹⁾ Vgl. meine »Substitutionentheorie« § 32.

unendlich viele Systeme der $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ derart bestimmen, dass nach wie vor $\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_\sigma$ von einander verschieden bleiben, dass es demnach σ numerisch von einander verschiedene Werte des ψ giebt.

Um den Beweis zu führen, setzen wir

$$\psi'_k - \psi'_\lambda = \alpha_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + \alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \dots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n}).$$

Hier werden μ der x_k und ebensoviele der x_λ gleich x_{a_1} ; ν der x_k und ebensoviele der x_λ gleich x_{b_1} . Unseren Festsetzungen gemäss können die Coefficienten der α nicht sämtlich verschwinden; denn dies träte nur dann ein, wenn ψ'_λ aus ψ'_k durch eine Substitution t ableitbar wäre, was ja aber ausgeschlossen ist. Wir betrachten das über alle Combinationen von je zwei ψ' ausgedehnte Product

$$\Pi(\psi'_k - \psi'_\lambda) = \Pi[\alpha_1(x_{k_1} - x_{\lambda_1}) + \alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \dots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})].$$

Unsere Behauptung kann jetzt die Form annehmen: das aufgestellte Product verschwindet nicht für alle Wertsysteme der α . Wir sortiren die Factoren des Products der rechten Seite; zuerst betrachten wir die, bei denen der Coefficient von α_1 nicht Null ist; dann die, bei denen er Null ist, während der von α_2 nicht verschwindet; dann die, bei denen die beiden ersten Coefficienten Null sind, der dritte jedoch nicht; u. s. f. Bei der ersten Klasse können wir es durch passende Wahl von α_1 , ohne Beschränkung von $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ dahin bringen, dass die zugehörigen Factoren nicht Null werden. Dazu ist nur nötig, dass α_1 keinen der Werte

$$-\frac{\alpha_2(x_{k_2} - x_{\lambda_2}) + \dots + \alpha_n(x_{k_n} - x_{\lambda_n})}{x_{k_1} - x_{\lambda_1}}$$

erhält, deren Zahl endlich ist und deren Wert wegen des nicht verschwindenden Nenners angebbar sein wird. Bei der zweiten Klasse können wir dasselbe durch passende Wahl von α_2 ohne Beschränkung von $\alpha_3, \alpha_4, \dots$ erlangen u. s. f. Wählt man demgemäss α_n in den Factoren der letzten Klasse (für welche die Coefficienten von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ verschwinden) ganz beliebig, bestimmt α_{n-1} durch das Nichtverschwinden der Factoren der vorletzten Klasse u. s. f., dann erhält man Systeme von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, für die kein ψ'_λ einen ψ'_k gleich wird. Eine Einwirkung der F_1, F_2, \dots, F'_1

ist also überhaupt nicht zu bemerken. Hieraus folgt: *Auf die Gleichheit der verschiedenen Werte von linearen Ausdrücken der Form*

$$\psi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

haben nur diejenigen Beziehungen unter den x bestimmenden, d. h. von der Wahl der α unabhängig bestehenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner x selbst begründet sind.

§ 2.

Wir setzen zunächst für den ersten Teil dieses Paragraphen die x wieder als völlig unbestimmte Grössen voraus.

Einer jeden unter den x_1, x_2, \dots, x_n möglichen *Functionengattung* ⁽¹⁾ entspricht eine charakteristische *Substitutionengruppe*, welche »die Permutationen der Gattung« enthält. Dies heisst: die Gruppe G der Gattung \mathfrak{G} umfasst alle und auch nur diejenigen Substitutionen, welche die Form der sämtlichen zur Gattung \mathfrak{G} gehörigen Functionen y, y', y'', \dots nicht verändern. Wenn diese Substitutionen

$$s_1 = 1, s_2, s_3, \dots, s_r$$

sind, so deuten wir die Gruppe G wohl auch kurz durch

$$G = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_r]$$

an. Die Zahl r , die *Ordnung der Gruppe*, zeigt demnach, für wie viele Substitutionen die Functionen y, y', y'', \dots der Gattung \mathfrak{G} ungeändert bleiben; hieraus folgt, dass diese Functionen je $\frac{n!}{r} = \rho$ verschiedene Werte besitzen.

Die zu $y^{(a)}$ gehörigen mögen $y_1^{(a)}, y_2^{(a)}, \dots, y_\rho^{(a)}$ sein, derart, dass wir $y^{(a)}$ auch $= y_1^{(a)}$ setzen; alle diese Werte heissen die »conjugirten Werte« von $y^{(a)}$; sie bestimmen »conjugirte Gattungen« $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_\rho$, wo wir auch \mathfrak{G} gleich \mathfrak{G}_1 annehmen; zu ihnen gehören »conjugirte Gruppen« G_1, G_2, \dots, G_ρ , wo endlich auch G mit G_1 identisch sein soll. Die ρ conjugirten Werte

⁽¹⁾ Über die hier benutzte Terminologie, welche sich der von Herrn KRONECKER gebrauchten genau anschliesst vgl. L. KRONECKER: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen; S. 6 ff.

einer Function y sind die Wurzeln einer Gleichung ρ^{ten} Grades, deren Coefficienten dem aus den elementaren symmetrischen Functionen

$$(1) \quad \bar{f}_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \bar{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \cdots \quad \bar{f}_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

gebildeten Rationalitätsbereiche angehören.

Da conjugirte Werte aus einander durch Anwendung gewisser Substitutionen hervorgehen, so besitzen sie sämmtlich denselben Typus. Wir wollen eine der Substitutionen, welche y_1 in y_k umwandelt mit σ_k bezeichnen; dann erhält man sämmtliche Substitutionen derselben Eigenschaft durch $s_\lambda \sigma_k$ ($\lambda = 1, 2, \dots, r$) oder kurz durch $G_1 \cdot \sigma_k$. Ist $y^{(a)}$ eine andere Function derselben Gattung, so bezeichnen wir mit $y_k^{(a)}$ denjenigen ihrer conjugirten Werte, welcher aus $y_1^{(a)}$ durch $G_1 \cdot \sigma_k$ abgeleitet werden kann.

Sämmtliche $n!$ Substitutionen lassen sich in die folgende Tabelle einordnen

$$(C) \quad \begin{array}{lll} s_1 = 1, & s_2, \dots s_r; & \mathfrak{G}_1 \\ s_1 \sigma_2, & s_2 \sigma_2, \dots s_r \sigma_2; & \mathfrak{G}_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1 \sigma_\rho, & s_2 \sigma_\rho, \dots s_r \sigma_\rho; & \mathfrak{G}_\rho \end{array}$$

bei welcher die i^{te} Zeile alle diejenigen und nur die Substitutionen enthält, welche $y_1^{(a)}$ in $y_i^{(a)}$ umwandeln.

Wir gehen nach der Recapitulation dieser bekannten Begriffe und Bezeichnungen dazu über, Functionen $y^{(a)}$ mit Hülfe der im ersten Paragraphen aufgestellten ϕ zu bilden.

Wenden wir G_1 auf ϕ_1 an, so entstehen dadurch r Ausdrücke

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_r,$$

welche ihrer Form nach von einander verschieden sind. Jede symmetrische Function derselben bleibt für G_1 ungeändert und gehört also zur Gattung \mathfrak{G}_1 oder zu einer unter \mathfrak{G}_1 enthaltenen Gattung. Richtet man jedoch die symmetrische Function so ein, dass sie nur dann ungeändert bleibt, wenn die ϕ mit einander vertauscht werden, dann gehört sie wirklich zur Gattung \mathfrak{G}_1 . Bei

$$(2) \quad y = \phi_1^e + \phi_2^e + \phi_3^e + \cdots + \phi_r^e$$

kann der erstere Fall für $e = 1$ eintreten; denn hier bleibt möglicherweise ϕ_1 auch ungeändert für Substitutionen, welche nicht zu G_1 gehören. Für ein unbestimmtes e geht dies aber nicht mehr an.

Aus der Tabelle (C) erkennt man, dass alle $n!$ Ausdrücke von ϕ in die ρ conjugirten y_1, y_2, \dots, y_ρ als Summanden eingehen; jeder Wert von ϕ kommt überhaupt nur einmal vor; es ist also schon durch das Auftreten eines ϕ_μ das zugehörige y_a unzweideutig bestimmt: es ist dasjenige, in dessen Zeile der Tabelle (C) die Substitution s_μ auftritt, welche ϕ_1 in ϕ_μ umändert. Dieselbe Substitution s_μ führt demnach auch y_1 in y_a über. Allgemeiner: enthält y_k den Summanden ϕ_k^e , y_λ den Summanden ϕ_λ^e und geht ϕ_k in ϕ_λ durch die Substitution τ über, so geht auch y_k in y_λ durch dieselbe Substitution über.

Wir haben bisher in diesem Paragraphen die x als unbestimmte Grössen angenommen; von jetzt ab wollen wir die Voraussetzungen (A) und (B) des ersten Paragraphen gelten lassen. Wir wählen die α derart, dass

$$\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_\sigma \quad \left(\sigma = \frac{n!}{\mu! \nu!} \right)$$

von einander verschieden sind. Dann erkennt man ohne jede Schwierigkeit, dass die Willkür, die bei der Wahl von α_0 herrscht, dazu benutzt werden kann, auch die Moduln der ϕ' von einander verschieden zu machen. Hierbei sei

$$\text{mod. } \psi'_1 > \text{mod. } \psi'_2 > \dots > \text{mod. } \psi'_{\sigma}.$$

Endlich kann man den ganzzahligen, sonst aber beliebigen Exponenten e so gross annehmen, dass man erhält

$$\begin{aligned} \psi_1^{\prime e} &> \rho(\psi_2^{\prime e} + \psi_3^{\prime e} + \cdots + \psi_\sigma^{\prime e}) \\ \psi_2^{\prime e} &> \rho(\psi_3^{\prime e} + \psi_4^{\prime e} + \cdots + \psi_\sigma^{\prime e}) \\ &\vdots \\ \psi_{\sigma-1}^{\prime e} &> \rho \cdot \psi_\sigma^{\prime e}; \end{aligned}$$

der Kürze halber sind die ϕ' statt ihrer Moduln hingeschrieben. Aus unseren Festsetzungen ergibt sich, dass eine Gleichung

$$(3) \quad m_1 \psi_1^{\prime e} + m_2 \psi_2^{\prime e} + \dots + m_\sigma \psi_\sigma^{\prime e} = \mu_1 \psi_1^{\prime e} + \mu_2 \psi_2^{\prime e} + \dots + \mu_\sigma \psi_\sigma^{\prime e} \quad (m, \mu \leq \rho)$$

nur dann bestehen kann, wenn alle entsprechenden m, μ einander gleich sind.

Unter den jetzt geltenden Annahmen (A), (B) geht die oben gebildete Function y_i aus ihrer allgemeinen Gestalt

$$(2') \quad y_i = \phi'_{i_1} + \phi'_{i_2} + \dots + \phi'_{i_r}$$

in die besondere Form

$$y_i = m_{i_1} \phi'^e_{i_1} + m_{i_2} \phi'^e_{i_2} + \dots + m_{i_t} \phi'^e_{i_t}$$

über, da gewisse Werte $\phi'_{i_1}, \phi'_{i_2}, \dots$ gleich $\phi'^e_{i_1}$ u. s. w. werden können. Sollte nun durch (A), (B) eine Gleichheit zweier conjugirter Werte hervorgerufen werden, etwa

$$y_i = y_k,$$

so folgt wegen (3) dass y_i, y_k dieselben Summanden ϕ'^e_a enthalten. Dies erlaubt den Rückschluss, dass vor dem Gelten von (A), (B) beide conjugirte Werte y_i, y_k nur Summanden derjenigen Gruppe enthielten, als deren Repräsentanten wir ϕ'_a zurückbehalten haben. Zwei derartige Summanden können durch Substitutionen t in einander verwandelt werden, in denen nur die $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_n}$ und die $x_{b_1}, x_{b_2}, \dots, x_{b_v}$ sich untereinander umstellen. Nach unseren obigen Ausführungen leitet dann t den ganzen Summandencomplex der Function y_i in den von y_k über.

Dass umgekehrt alle diejenigen Functionen, welche durch Substitutionen t aus einander hervorgehen, durch (A), (B) einander gleich werden, ist selbstverständlich; es geht aber aus unserer Beweisführung auch hervor, dass dieser a priori ersichtliche Fall auch der einzige ist, in welchem conjugirte Werte $y^{(a)}_i, y^{(a)}_k$ einer jeden Function $y^{(a)}$ der Gattung einander gleich werden; und es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass nur die Bedingungen (A) nicht aber die Festsetzungen (B) einen Einfluss dabei haben.

Herr KRONECKER hat gezeigt,⁽¹⁾ dass sich für irgend welche gegebenen Werte f_1, f_2, \dots, f_n von (1) — vorausgesetzt nur, dass nicht zwei der x einander gleich werden — stets unendlich viele specielle Functionen jeder Gattung \mathfrak{G} bestimmen lassen, deren sämtliche conjugirte unter einander ver-

(¹) Grundzüge einer arithmetischen Theorie u. s. w., S. 42.

schieden sind.» Diesem Satze können wir jetzt folgende Erweiterung zur Seite stellen: *Auf die Gleichheit conjugirter Werte aller Functionen einer Gattung haben nur diejenigen Beziehungen unter den x einen bestimmenden Einfluss, welche in der Gleichsetzung einzelner x bestehen.*

Beachtenswert ist ferner noch der Umstand, dass wir Functionen y construirt haben, bei denen aus $y_i = y_k$ auf die Existenz der Substitution t geschlossen werden kann, welche y_i in y_k verwandelt. Denn weil die Substitution von der Wahl der Function y unabhängig ist, so folgt, dass für jedes beliebige $y^{(a)}$ stets $y_i^{(a)} = y_k^{(a)}$ sein wird. Das Gleichwerden conjugirter Werte findet also seinen genauen Ausdruck in Gruppeneigenschaften. Somit ist auch ersichtlich: *Verschwindet die Discriminante D_y jeder beliebigen Function y der Gattung \mathfrak{G} für gewisse Beziehungen (A), (B) unter den x , so ist dieses Verschwinden nicht nur für D_y , sondern auch für gewisse Differenzen $y_i - y_k$ invariant.*

§ 3.

Der zuletzt aufgestellte Satz erlaubt uns, statt des Verschwindens der Discriminante selbst, dasjenige der Differenzen $y_i - y_k$ zu untersuchen.

Herr KRONECKER hat für Functionen mit mehreren Veränderlichen eine Erweiterung des Begriffes der Division gegeben.⁽¹⁾ Verschwindet eine ganze Function $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n sobald gewisse Beziehungen platzgreifen, welche durch die Gleichungen

$$(B) \quad F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

dargestellt werden, dann ist g als ganze lineare Function von F_1, \dots, F_k darstellbar, mit Coefficienten, welche rationale ganze Function von x_1, x_2, \dots, x_n sind:

$$(1) \quad g(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1, \dots, x_n)F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + P_k(x_1, \dots, x_n)F_k(x_1, \dots, x_n).$$

Wir schreiben dies den Einführungen des Herrn KRONECKER entsprechend

$$(1') \quad g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0, \quad (\text{modd. } F_1, F_2, \dots, F_k)$$

nennen F_1, F_2, \dots, F_k ein »Modul- oder Divisoren-System k^{ter} Stufe« von g , und sagen, dass g dieses Divisorensystem enthält.

⁽¹⁾ a. a. O. S. 72 ff.

Hiernach können wir die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen folgendermassen aussprechen:

1) Jedes Modulsystem der Discriminanten D_y der Gattung \mathfrak{G} ist gleichzeitig Modulsystem einer bestimmten und durch die Gruppe G der Gattung bestimmbaren Differenz $y_i - y_k$, unabhängig von der Wahl von y .

2) Alle Modulsysteme der Discriminanten D_y bez. der Differenzen $y_i - y_k$ bestehen aus Functionen der Form

$$F_{\alpha, \beta} = x_\alpha - x_\beta.$$

3) Die Modulsysteme von $y_i - y_k$ werden sämtlich durch diejenigen Substitutionen bestimmt, welche y_i in y_k umwandeln. Hierzu ist es nur nötig, dass alle diejenigen Elemente x , welche je einen Cyklus einer solchen Substitution bilden, einander gleich gesetzt werden.

Es fragt sich nun umgekehrt, ob aus jeder Substitution, welche y_i in y_k umwandelt, ein Modulsystem gebildet werden kann. Dies ist nach dem, am Schlusse des vorigen Paragraphen Besprochenen zwar an und für sich klar; jedoch müssen einige hierbei auftretende Punkte noch weiter untersucht werden. Dieselben beziehen sich auf die Zusammensetzung von Modulsystemen. Wir wollen zunächst an einem einfachen Beispiele die Frage klarstellen.

Es sei in dem Bereiche der vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 eine Functionengattung \mathfrak{G} durch

$$G_1 = [1, (x_1 x_2 x_3), (x_1 x_3 x_2)]$$

bestimmt. Eine der zur Gattung gehörigen Functionen ist

$$y_1 = x_1^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_1^\beta.$$

Der conjugirte Wert

$$y_2 = x_4^\alpha x_2^\beta + x_2^\alpha x_3^\beta + x_3^\alpha x_4^\beta$$

von y_1 ist durch die Substitutionen

$$G_1 s_2 = \{(x_1 x_4), (x_1 x_2 x_3 x_4), (x_1 x_3 x_2 x_4)\}_1$$

aus dem ersteren Werte entstanden. Wir erhalten demnach drei in $y_1 - y_2$ enthaltene Divisorensysteme, bemerken aber zugleich, dass verschiedene Substitutionen gleiche Modulsysteme hervorrufen können, sowie dass einige

Modulsysteme erfüllt sein können, falls bereits andere einfachere befriedigt sind. Die hier auftretenden sind

$$\text{I) } x_1 - x_4; \quad \text{II) } x_1 - x_4; \quad x_1 - x_2; \quad x_1 - x_3;$$

Dass jedes derselben wirklich in

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1^\alpha - x_4^\alpha)x_2^\beta + (x_1^\beta - x_4^\beta)x_3^\alpha \\ &= (x_1 - x_4) \{ [x_1^{\alpha-1} + x_1^{\alpha-2}x_4 + \dots]x_2^\beta + [x_1^{\beta-1} + x_1^{\beta-2}x_4 + \dots]x_3^\alpha \} \end{aligned}$$

enthalten ist, leuchtet ein; dass ferner ein aus I), II) componirtes System⁽¹⁾ nicht vorkommt, ist gleichfalls daraus ersichtlich, dass der zweite Factor überhaupt für keine Gleichsetzungen der x mehr zu Null wird.

Wir werden daher, um die Divisoren von $y_k - y_i$ zu ermitteln, aus den Substitutionen des Complexes G_{1s_k} nur diejenigen zur Bildung von Modulsystemen verwenden, bei denen die Elemente der einzelnen Cykel nicht gänzlich in den Elementen der einzelnen Cykel anderer Substitutionen auftreten. (Die früher von mir benutzte Benennung des »Enthalteseins«, durch welche ich diese Beziehung von Substitutionen zu einander andeutete, gebe ich auf, da sie mit der bei Modulsystemen gebräuchlichen Verwendung dieses Wortes nicht übereinstimmt.)

Ein zweites Beispiel mag auf eine weitere hier auftretende Eigentümlichkeit aufmerksam machen. Es sei, wieder in dem Bereiche von vier Variablen

$$\begin{aligned} G_1 &= [1, (x_1x_2x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4x_3x_2)] \\ y_1 &= x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_1^2 \\ y_2 &= x_1x_4^2 + x_4x_3^2 + x_3x_2^2 + x_2x_1^2, \end{aligned}$$

dann wird

$$\begin{aligned} G_1s_2 &= [(x_1x_3), (x_1x_2)(x_3x_4), (x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)] \\ y_1 - y_2 &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)[x_2 + x_4 - x_1 - x_3]. \end{aligned}$$

Das Auftreten von (x_1x_3) und von (x_2x_4) in dem Complex G_1s_2 äussert sich durch das Vorhandensein der beiden Factoren $(x_1 - x_3)$ und

⁽¹⁾ Vgl. KRONECKER, a. a. O. S. 77 ff. — sowie auch die weiteren Ausführungen dieses Paragraphen.

$(x_2 - x_4)$; dasjenige von $(r_1 r_2)(r_3 r_4)$, $(r_1 r_4)(r_2 r_3)$ durch das Verschwinden des letzten Factors

$$\phi = (x_2 + x_4) - (x_1 + x_3)$$

für die beiden Gleichungssysteme

$$\text{I)} \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0; \qquad \text{II)} \quad x_1 - x_4 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0,$$

welche den Modulsystemen

$$\text{I')} \quad x_1 - x_2, \quad x_3 - x_4; \qquad \text{II')} \quad x_1 - x_4, \quad x_2 - x_3$$

entsprechen. Dass ϕ aber auch das aus I'), II') componirte Modulsystem in sich schliesst, ist nicht unmittelbar ersichtlich noch auch richtig.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Klärung dieser Verhältnisse; dazu müssen wir, wie dies ja bei dem vorliegenden Thema natürlich ist, auf die grundlegenden Untersuchungen des Herrn KRONECKER unser Augenmerk richten. Wir entnehmen denselben folgende begrifflichen Festsetzungen:⁽¹⁾

I. Es ist für zwei Functionen M, M' von n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n

$$M \equiv M' \pmod{M_1, M_2, M_3, \dots},$$

wenn die Differenz $M - M'$ das Modulsystem (M_1, M_2, M_3, \dots) enthält.

II. Ein Modulsystem (M_1, M_2, \dots) enthält ein anderes (M'_1, M'_2, \dots) wenn jedes Element des ersteren das Modulsystem (M'_1, M'_2, \dots) enthält. Wenn jedes der beiden Modulsysteme das andere enthält, so sind sie einander *aequivalent*, und dies wird durch: $(M_1, M_2, \dots) \sim (M'_1, M'_2, \dots)$ bezeichnet.

III. Ein Modulsystem (M_1, M_2, \dots) , dessen einzelnen Elemente durch die verschiedenen Producte von je zwei Elementen $M_n M'_k$ zweier Modulsysteme (M_1, M_2, \dots) , (M'_1, M'_2, \dots) gebildet werden, heisst *aus diesen beiden Systemen zusammengesetzt oder componirt*, und diese beiden Systeme sollen, wegen der Analogie der Composition mit der Multiplication, auch als *Factoren* bezeichnet werden.

⁽¹⁾ a. a. O. S. 77—78; 84; 85. Hier findet man die unter Nr. I bis IX gegebenen Sätze; X ist auf S. 85 VII, sowie auf persönliche Mittheilungen seitens des Herrn KRONECKER gegründet.

Der Ausdruck »Composition» soll ohne Weiteres auf äquivalente Systeme übertragen und demnach auch jedes, dem System $(M'_h M''_k)$ äquivalente System als aus den beiden Systemen (M') , (M'') componirt bezeichnet werden, so dass die Elemente des componirten Systems als bilineare Functionen der beiderseitigen Elemente M' , M'' mit ganzen, dem Bereiche angehörigen Coefficienten zu charakterisiren sind.

IV. Ein Modulsystem heisst *irreductibel*, wenn es nicht aus zwei anderen zusammengesetzt ist, deren jedes ein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

V. Eine algebraische Form soll als eine andere Form »enthaltend» bezeichnet werden, wenn das Coefficientensystem der letzteren in dem der ersteren (nach der in II enthaltenen Bestimmung) enthalten ist.

VI. Ist die Form F in F_0 , aber auch umgekehrt F_0 in F enthalten, so sind die beiden Formen einander »absolut äquivalent» (Vgl. II).

VII. Eine Form, welche durch wirkliche Multiplication von zwei anderen Formen entsteht, und jede einem solchen Product äquivalente Form soll eine aus den beiden ersten *zusammengesetzte oder componirte Form* genannt werden.

VIII. Eine *eigentlich primitive Form* ist dadurch charakterisirt, dass ihre Coefficienten keinen Divisor irgend einer Stufe mit einander gemein haben. Jede eigentlich primitive Form ist absolut äquivalent Eins.

IX. Eine Form wird als »nicht zerlegbar», »irreductibel» oder als »Primform» bezeichnet, wenn sie keinem Producte von zwei nicht primitiven Formen des festgesetzten Bereiches äquivalent ist.

X. Die Äquivalenz wie die Primitivität lässt Abstufungen zu: Eine Form ist *uneigentlich primitiv zur k^{ten} Stufe*, wenn ihre Coefficienten keine Divisoren von k^{ter} oder niedrigerer Stufe gemeinsam haben. Zwei Formen sind *uneigentlich äquivalent zur k^{ten} Stufe*, wenn sie in allen Divisoren von der ersten bis zur k^{ten} Stufe übereinstimmen.

Auf diese letzte Definition können wir uns stützen, um die Modulsysteme in einer unserer Differenzen $y_i - y_k$, wenigstens so weit es für unsere Zwecke erforderlich ist, zu componiren. Wir benutzen dazu den Begriff der uneigentlichen Äquivalenz der k^{ten} Stufe; dann dürfen wir einer Form als Factor eine Form, die uneigentlich primitiv von höherer als der k^{ten} Stufe ist, hinzufügen, weil dadurch der Charakter der Divisorensysteme, soweit diese in Frage kommen, nicht geändert wird.

Beschränkt man sich bei unserem zweiten Beispiele, bei welchem die Notwendigkeit einer allgemeineren Auffassung handgreiflich wurde, auf Aequivalenzen, welche die zweite Stufe nicht überschreiten, so sind für die unbestimmten Grössen u_1, u_2, u_3, u_4 die Formen

$$\phi, \quad \phi \cdot [u_1(x_1 - x_2) + u_2(x_3 - x_4) + u_3(x_1 - x_4) + u_4(x_2 - x_3)],$$

einander aequivalent. Das letztere Product ist als homogene, lineare Function der vier Producte

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_4), (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), (x_1 - x_4)(x_3 - x_4), (x_2 - x_3)(x_3 - x_4)$$

darstellbar, so dass hier möglich ist, zu schreiben, was bei absoluter Aequivalenz nicht anging

$$\phi \equiv 0 \quad \text{modd. } [(x_1 - x_2, x_3 - x_4) \cdot (x_1 - x_4, x_2 - x_3)].$$

Dieses Vorgehen lässt sich verallgemeinern.

Die Form F möge zwei Divisoren-Systeme besitzen, von denen keins von höherer als der k^{ten} Stufe sein mag, und auch keins in dem andern enthalten sein soll: $(F_1, F_2, \dots, F_k), (F'_1, F'_2, \dots, F'_k)$. Durch diese Voraussetzungen wird bewirkt, dass $k < n$, und dass zweitens

$$(F_1, F_2, \dots, F_k, F'_1, F'_2, \dots, F'_k)$$

von höherer Stufe ist, als jedes der beiden ersteren Systeme. Aus unseren Annahmen folgen die Gleichungen

$$(2) \quad F = F_1 \cdot P_1 + F_2 \cdot P_2 + \dots + F_k \cdot P_k$$

$$(3) \quad F = F'_1 \cdot P'_1 + F'_2 \cdot P'_2 + \dots + F'_k \cdot P'_k.$$

Fügt man der Function F den Factor

$$(4) \quad \phi = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_k F_k + u'_1 F'_1 + u'_2 F'_2 + \dots + u'_k F'_k$$

hinzu, so ändert dieser, da er primitiv von k^{ter} Stufe ist, die jetzt allein wesentlichen Divisoren-Systeme von F nicht. Nun ist

$$F \cdot \phi = \sum_{h=1}^k F''_h \cdot P'_h \cdot [u_1 F_1 + \dots + u_k F_k] + \sum_{h=1}^k F_h \cdot P_h [u'_1 F'_1 + \dots + u'_k F'_k]$$

$$(5) \quad F \cdot \phi = \sum_{h, \mu} Q_{h, \mu} \cdot F_h \cdot F'_\mu,$$

und daraus erhellt, dass $F \cdot \phi$ das aus (F_λ) , (F'_λ) componirte Divisorensystem $(F_\lambda F'_\lambda)$ besitzt. Aus (5) folgt demnach

$$(6) \quad F \equiv 0 \quad \text{modd. } [(F_\lambda) \cdot (F'_\lambda)].$$

Diese Methode kann angewendet und fortgesetzt werden, so lange Divisorensysteme, die von höherer als der k^{ten} Stufe sind, für unwesentlich erklärt werden dürfen; es ist dagegen von einer weiteren Composition mit Systemen, die von gleicher Stufe sind wie ϕ , abzusehen.

Für $y_i - y_k$ ersehen wir die Möglichkeit der Composition aller mit einander nicht identischer Systeme von gleichem Typus, falls wir uns auf uneigentliche Primitivität der betreffenden Stufe beschränken. Bei identischen Systemen ist eine Composition nicht möglich. Sei etwa, um ein Beispiel hierfür zu geben

$$G_1 = 1, (x_1 x'_1)(x_2 x'_2)$$

$$\sigma_2 = (x_1 x_2 x_3 x_4)$$

$$G_2 \sigma_2 = \{(x_1 x_2 x_3 x_4), (x_1 x_4 x_3 x_2)\}$$

dann gehört zu jedem $y_1 - y_2$ das Modulsystem $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$. Wählen wir

$$y_1 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 + x_1 x_3 + x_2 x_4$$

so erhellt, dass $y_1 - y_2$ nur jenes Modulsystem, nicht das Quadrat desselben enthält, weil $y_1 - y_2$ lediglich Glieder erster Dimension umfasst.

§ 4.

Unsere früheren Untersuchungen zeigten, dass man sämtliche Divisorensysteme einer Differenz $y_i - y_k$, soweit dieselben für die Gattung invariant und also von der Bildung besonderer Functionen y unabhängig sind, aus den Betrachtungen der zugehörigen Gruppe ableiten kann. Diese gewährt hier, wie an vielen anderen Stellen, dieselben Vorteile, welche die KRONECKER'sche »Fundamentalgleichung der Gattung« bietet.

Ferner sahen wir soeben, wie und in wie weit die Divisorensysteme desselben Typus von $y_i - y_k$ eine Composition zulassen. Da endlich eine

Zusammensetzung von Divisorensystemen verschiedener Differenzen $y_i - y_k$, $y_i - y_m, \dots$ gar keine Schwierigkeiten macht, so sind wir in den Stand gesetzt, alle Divisorensysteme eines bestimmten Typus, welche in D_y eingehen, zu vereinigen und die Potenz anzugeben, in welcher das componirte System als Modulsystem von D_y erscheint.

Es treten hierbei Divisorensysteme von D_y auf, deren Elemente rationale ganze Functionen von $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ sind. Bezeichnen wir ein Divisorensystem von $y_i - y_k$ mit (u_1, v_1, w_1, \dots) und die verschiedenen Werte, welche dasselbe bei den Vertauschungen der x_1, x_2, \dots, x_n untereinander annehmen kann, mit $(u_2, v_2, w_2, \dots), (u_3, v_3, w_3, \dots), \dots, (u_n, v_n, w_n, \dots), \dots$, so werden alle diese als Divisorensysteme von D_y auftreten und, da sie von einander verschieden sein sollen, auch ihr Product. Dies ist jedoch nicht so beschaffen, dass alle seine Elemente symmetrisch in den x_1, x_2, \dots, x_n würden. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, welche bei den hierhergehörigen Fragen auftreten und deren directe Behandlung sehr eingehende Untersuchungen zu erfordern scheint, schlagen wir einen anderen Weg ein. Wir bilden Functionensysteme der $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$, deren Gesamtheit nur dann verschwindet, wenn vorgeschriebene Gleichheiten unter den Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n eintreten, also z. B. nur dann, wenn zwei Paare von Wurzeln oder dann wenn drei Wurzeln einander gleich werden. Wenn nun

$$\phi_1(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n), \quad \phi_2(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n), \quad \dots \quad \phi_K(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)$$

ein solches System ist, so liefert es das gesuchte Divisorensystem von D_y , welches den betreffenden Wurzelgleichheiten angehört, entweder in möglichster Einfachheit oder auch mehrfach. Jedenfalls ist dann, wenn nicht D_y selber, so eine Potenz von D_y als lineare homogene Function der ϕ mit Coefficienten darstellbar, welche ganz und rational in den \bar{f} sind. Bilden wir mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen das symmetrische Product mit den unbestimmten Grössen λ, μ, ν, \dots

$$H(u_n + \lambda v_n + \mu w_n + \dots)$$

und entwickeln dasselbe nach λ, μ, \dots , so geben die Coefficienten eine Reihe von Functionen ϕ mit den gewünschten Eigenschaften, also ein Divisorensystem einer Potenz von D_y . Schon die bedeutende Anzahl der

hierbei auftretenden Functionen zeigt, dass das System im Allgemeinen stark reducirt werden kann; die Anzahl der notwendigen Functionen wird höchstens gleich $n + 1$ werden.⁽¹⁾ Zu bemerken ist, dass an die Stelle des Factors $u_a + \lambda v_a + \mu w_a + \dots$ jeder andere gesetzt werden kann, dessen Verschwinden dasjenige von u_a, v_a, w_a, \dots nach sich zieht; es ist möglich, durch passende Wahl der Elemente von $u'_a + \lambda v'_a + \mu w'_a + \dots$ die Anzahl der Factoren zu verringern und damit die Ausführung der Berechnung zu erleichtern. So wird es sich im Allgemeinen empfehlen, nicht die Differenzen $x_k - x_\lambda$ selbst, sondern ihre Quadrate für u_a, v_a, \dots zu benutzen.

Für die Modulsysteme $(x_k - x_\lambda)$, welche die einzigen Divisoren erster Stufe sind, ergibt sich das bekannte Resultat, dass D_y die Discriminante Δ der Grundgleichung

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \equiv x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \dots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

als Factor enthält, falls \mathfrak{G} nicht symmetrisch ist.

Für die Modulsysteme zweiter Stufe giebt es zwei verschiedene Typen: einmal kann ein solches durch zwei Paare gleicher Wurzeln, ferner auch durch ein Tripel gleicher Wurzeln hervorgerufen werden.

Im ersten Falle wäre das Product

$$(P_1) \quad H[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_3 - x_4)^2]$$

im zweiten Falle das Product

$$(P_2) \quad H[(x_1 - x_2)^2 + \lambda(x_1 - x_3)^2]$$

zu entwickeln. Weil nun aber in diesen Producten je zwei Factoren einander entsprechen: $(u_a + \lambda v_a)$ und $(v_a + \lambda u_a)$, und die Multiplication derselben

$$(Q_1) \quad (u_a v_a + \lambda[u_a^2 + v_a^2] + \lambda^2 u_a v_a)$$

ergiebt, so kann, da hier wie bei allen Formen nur die Coefficienten von Wichtigkeit sind, das Glied mit λ^2 weggelassen und der Coefficient von λ durch $u_a + v_a$ ersetzt werden; denn

$$(Q_2) \quad u_a v_a + \lambda[u_a + v_a]$$

⁽¹⁾ KRONECKER, a. a. O. S. 37.

giebt durch sein Verschwinden genau dasselbe, was (Q_1) ergibt, dass nämlich u_α und v_α gleichzeitig Null sein müssen. Wir erhalten somit

$$(P'_1) \quad H[(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 + \lambda\{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2\}]$$

$$(P'_2) \quad H[(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 + \lambda\{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2\}].$$

Noch einfacher wird die Form durch die Wahl anderer u_α , v_α , z. B.

$$(P''_1) \quad H[(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + \lambda(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2]$$

$$(P''_2) \quad H[(2x_1 - x_2 - x_3)^2 + \lambda(2x_2 - x_3 - x_1)^2].$$

Aus dem ersten kann man für $n = 4$ das System ableiten

$$\Phi_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4) + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) + \\ & + (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4); \end{aligned}$$

aus dem zweiten für $n = 3$ das System

$$\Psi_1 = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3) + (2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2) + \\ & + (2x_3 - x_1 - x_2)(2x_1 - x_2 - x_3); \end{aligned}$$

beide können dann für die folgenden Bildungen bei $n > 4$ oder $n > 3$ benutzt werden:

$$(P'''_1) \quad H[\Phi_1 + \lambda\Phi_2]$$

$$(P'''_2) \quad H[\Psi_1 + \lambda\Psi_2].$$

Auf weitere in diese Untersuchung gehörige Verhältnisse werde ich an einer anderen Stelle genauer eingehen, so dass ich hier davon abbrechen darf. Nur einen Punkt will ich noch hervorheben.

Bilden wir die GALOIS'sche Resolventengleichung, welche auch kurz (entgegen der von SERRET und JORDAN benutzten Nomenclatur) als eine *Galois'sche Gleichung* bezeichnet werden mag, so ist die Gruppe derselben gleich Eins. Die Discriminante D_y enthält deswegen alle überhaupt nur

möglichen Divisorensysteme und dabei ein jedes in der höchst möglichen Potenz. Wählen wir für die $n!$ -wertige Function y_1 eine der von mir⁽¹⁾ angegebenen Bildungen mit unbestimmten Exponenten

$$y_1 = x_1^a x_2^b x_3^c \cdots x_n^z,$$

dann zeichnen sich die Resultate durch besondere Einfachheit und Übersichtlichkeit aus. Die Differenzen $y_i - y_k$ enthalten je zwei Glieder, deren gemeinsame Factoren weggeworfen werden können. Somit treten unter den Differenzen, welche zu Substitutionen eines bestimmten Typus gehören, verschiedene einfache, charakteristische Bildungen auf, in welche nur die bei den Wurzelgleichheiten (A; § 1) erscheinenden x eingehen. So erhält man in den beiden von uns besprochenen Fällen der Divisorensysteme zweiter Stufe

$$(P_1^{IV}) \quad \Pi(x_1^m x_2^n - x_3^m x_4^n),$$

$$(P_2^{IV}) \quad \Pi(x_1^{m+n} - x_2^m x_3^n);$$

man erkennt, dass durch das Verschwinden von n solchen Producten Beziehungen von der Form $x_a^a = x_a^a$ constituirt werden, und dass demnach eine passend gewählte $(n+1)^{te}$ Function desselben Typus hieraus den Schluss $x_a = x_a$ u. s. w. ermöglicht.

Die Potenz, in welcher ein Divisorensystem, falls es das darzustellende Gebilde einfach liefert, als Factor von D_y auftritt, ist aus der Betrachtung der Gruppe leicht zu bestimmen, sobald man die gesammte Tabelle (C) als vorliegend ansieht; dagegen wird die Feststellung der Anzahl schwieriger, wenn nur die erste Zeile von (C) nämlich G_1 als bekannt gilt. Für den einfachsten Fall, für den Factor A , ergibt sich jedoch auch hier sofort als Exponent

$$\rho[\frac{1}{2} n(n-1) - q];$$

für den Fall von drei einander gleichen Wurzeln habe ich die Frage gleichfalls erledigt;⁽²⁾ es lohnt sich jedoch nicht auf weitere Untersuchungen derselben einzugehen.

⁽¹⁾ Substitutionentheorie. § 31.

⁽²⁾ Journal f. reine u. angewandte Mathematik. B. XC; S. 164, ff.

§ 5.

Wären wir statt von einer allgemeinen von einer speciellen Gleichung n^{ten} Grades ausgegangen, so hätte es sich ereignen können, dass einige oder auch wohl alle Gattungen ganzer Functionen der Wurzeln einen gemeinsamen Teiler, der vorher bei allgemeinen Gleichungen constatirt wurde, nicht mehr besitzen. Diesen Fall wollen wir eingehender untersuchen. Um von der allgemeinen Gleichung

$$(1) \quad x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \dots \pm f_n \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$$

zu einer beliebigen speciellen zu kommen, ist die *Adjungirung* einer einzigen Gattung \mathfrak{G}_1 ihrer Wurzeln notwendig und hinreichend. Die so modificirte Gleichung wollen wir mit (1') bezeichnen. Genau genommen kommen wir dabei aber nicht zu einer einzigen, sondern zu einer ganzen *Classe von Gleichungen*, und von einer solchen gelten die nachstehenden Untersuchungen. Substitutionentheoretisch hat die Adjungirung den Effect, dass bei allen weiteren an (1') geknüpften Betrachtungen nur diejenigen Substitutionen angewendet werden dürfen, welche zu der Gruppe G_1 von \mathfrak{G}_1 gehören, da jede zu \mathfrak{G}_1 gehörige Function y_1 ungeändert bleiben muss. Wählt man als zu behandelnde Gattung der Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n von (1') die Gattung I''_1 , so gehören zu dieser in dem Bereiche $(\mathfrak{G}_1, f_1, \dots, f_n)$ nur diejenigen Substitutionen der Gruppe von I''_1 , welche gleichzeitig in \mathfrak{G}_1 vorkommen. Wir können daher in diesem Falle I''_1 durch $\mathfrak{G}'_1 = I''_1 + u\mathfrak{G}_1$ ersetzen und bewirken hierdurch, dass die Gruppe G'_1 von \mathfrak{G}'_1 eine Untergruppe von G_1 wird. Der Quotient der Ordnungen von G_1 und G'_1 sei ρ ; dann besitzt jede Function y'_1 der Gattung \mathfrak{G}'_1 innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G}_1; f_1, f_2, \dots, f_n)$ gerade ρ conjugirte Werte $y'_1, y'_2, \dots, y'_\rho$, und der im zweiten Paragraphen aufgestellten Tabelle (C) entspricht hier eine Tabelle (C'), welche in ρ Zeilen alle Substitutionen von G_1 und zwar in der ersten derselben alle Substitutionen von G'_1 enthält.

Die Untersuchungen des ersten Abschnittes zeigen, dass die Discriminanten $D_{y'}$ aller Functionen y' der Gattung \mathfrak{G}' nur dann einen gemeinsamen Teiler, eine »Gattungsdiscriminante« besitzen,⁽¹⁾ wenn es Transposi-

(¹) Von gemeinsamen Zahlenfactoren ist abgesehen. Alle Kreisteilungsgattungen besitzen durch p theilbare Discriminanten; diese gelten nicht als Gattungsdiscriminanten im eigentlichen Sinne.

tionen giebt, welche in G_1 aber nicht in G'_1 vorkommen, also in (C') ausserhalb der ersten Zeile.

Haben wir uns demnach die Aufgabe zur Lösung vorgelegt: *Es sollen alle Gattungen \mathfrak{G}_1 gefunden werden, für welche es Gattungen ohne Gattungsdiscriminante giebt*, — so lässt sich diese jetzt auch folgendermassen formuliren: *Es sollen alle Gruppen G_1 gefunden werden, bei denen gewisse Untergruppen G'_1 genau dieselben Transpositionen umfassen wie G_1 .*

Wir teilen hier die Untersuchung, um einen ersichtlichen Fall sofort zu erledigen. G_1 möge überhaupt keine Transpositionen umfassen. Dann enthält keine Gattung der Wurzeln einer hierdurch bestimmten Gleichung eine Gattungsdiscriminante. Und umgekehrt: Wenn keine Gattung der Wurzeln einer zu $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_n)$ gehörigen Gleichung eine Gattungsdiscriminante besitzt, dann kommen in G_1 keine Transpositionen vor. Der einfachste Fall dieser Art ist der, in welchem \mathfrak{G}_1 die alternirende oder eine unter ihr enthaltene Gattung darstellt; dasselbe ereignet sich bei der cyklischen, der metacyklischen, der halbmetacyklischen Gattung; ferner bei jeder primitiven Gruppe, deren Ordnung $< n!$ ist, u. s. f.

Zweitens betrachten wir den Fall, dass G_1 Transpositionen besitzt. Kommen diese nicht sämtlich in G'_1 vor, so treten in die Discriminante D_y als Factor einer oder mehrere der in $(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots)$ irreductiblen Teiler, in welche Δ bei der Adjungirung irgend einer nicht symmetrischen Gruppe G_1 zerlegt wird. Wäre nämlich Δ nach der Adjungirung irreductibel geblieben, so gäbe es in G_1 eine Substitution, welche $(x_\alpha - x_\beta)^2$ in $(x_\gamma - x_\delta)^2$ umwandelt, wobei $\alpha, \beta; \gamma, \delta$ beliebige Indices der Reihe $1, 2, \dots, n$ sind; diese Substitution sei $t = \dots x_\alpha x_\gamma \dots x_\beta x_\delta \dots$. Ist jetzt $\sigma = (x_\alpha x_\beta)$ eine von den der Voraussetzung gemäss vorhandenen Transpositionen von G_1 , so enthält diese Gruppe auch $t^{-1}\sigma t = (x_\gamma x_\delta)$, d. h. alle Transpositionen, und sie wäre sonach gegen die Annahme mit der symmetrischen Gruppe identisch. Potenzen solcher Factoren von Δ übernehmen hier also die Rolle der Gattungsdiscriminante.

Wir fragen weiter, unter welchen Bedingungen, in dem Falle dass G_1 Transpositionen besitzt, genau dieselben auch in G'_1 vorkommen, wann also für \mathfrak{G}'_1 keine Gattungsdiscriminante besteht. Wir wollen bei der Untersuchung hierüber annehmen, dass (1') irreductibel sei; wir beschränken uns also, nach der KRONECKER'schen Terminologie, auf die Adjungi-

»eigentlicher Gattungen«; nach der CAUCHY'schen auf die »transitiver Gruppen«.

Dann lässt sich sofort constataren, dass G_1 eine imprimitive Gruppe ist. Denn eine primitive Gruppe, welche Transpositionen besitzt, wie dies bei G_1 zutrifft, muss symmetrisch sein. (Vgl. Substitutionentheorie § 74).

Aus diesem ersten Resultate folgt weiter (ibid. § 222), dass (1') das Resultat der Elimination einer Grösse x'' aus zwei algebraischen Gleichungen ist:

$$g_1(x; x''; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n) = 0, \quad g''(x''; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n) = 0.$$

Sollte $g_1(x, x'') = 0$ im Gebiete $(x''; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots)$ noch imprimitiv sein, so kann man diese Gleichung als Eliminationsresultat von x' aus den beiden Gleichungen

$$g(x; x'; x''; \bar{f}_1, \dots) = 0, \quad g'(x'; x''; \bar{f}_1, \dots) = 0$$

auffassen. Wir wollen, um den Abschluss, der sich ja einstellen muss, sofort herbeizuführen, g als primitiv ansehen. Dann erscheint (1') als Resultat der Elimination von x', x'' aus

$$(3) \quad g(x; x'; x''; \bar{f}_1, \dots) = 0, \quad g'(x'; x''; \bar{f}_1, \dots) = 0, \quad g''(x''; \bar{f}_1, \dots) = 0$$

in der Form

$$(4) \quad \prod_{\alpha=1}^k \prod_{\beta=1}^{\lambda} g(x; x'_{\alpha\beta}; x''_{\alpha}; \bar{f}_1, \dots) = 0.$$

Hierbei bedeuten $x''_1, x''_2, \dots, x''_k$ sämtliche Wurzeln von $g''(x'') = 0$; ferner $x'_{\alpha 1}, x'_{\alpha 2}, \dots, x'_{\alpha \lambda}$ sämtliche Wurzeln von $g'(x'; x''_{\alpha}) = 0$. Endlich wollen wir mit $x_{\alpha\beta 1}, x_{\alpha\beta 2}, \dots, x_{\alpha\beta n}$ die Wurzeln von $g(x; x'_{\alpha\beta}; x''_{\alpha}) = 0$ bezeichnen.

Die zu (1') resp. (4) gehörigen Substitutionen ordnen wir nunmehr in eine Tabelle ein, deren erste Zeile alle diejenigen enthalten soll, durch welche die beiden ersten Indices nicht berührt werden; die einzelnen Cyklen sind bei ihnen von der Form $(x_{\alpha\beta h} x_{\alpha\beta k} \dots x_{\alpha\beta m})$. Diese Substitutionen werden erlangt, wenn man die k, λ einander ähnlichen Gruppen aufstellt, welche zu den Gleichungen

$$g(x; x'_{\alpha\beta}; x''_{\alpha}; \bar{f}_1, \dots) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k; \beta = 1, 2, \dots, \lambda)$$

gehören; diese seien $I'_{11}, I'_{12}, \dots, I'_{\alpha\beta}, \dots$. Die erste Zeile unserer Tabelle enthält dann die Gruppe $(I'_{11}, I'_{12}, \dots, I'_{\alpha\beta}, \dots) = H$.

Um die zweite Zeile zu bilden multipliciren wir H mit irgend einer nicht der ersten Zeile enthaltenen Substitution. In Folge der Imprimitivität vertauscht diese Substitution Systeme von Wurzeln, welche durch die beiden ersten Indices charakterisirt werden; dieselbe Vertauschung der Systeme findet dann für die ganze Zeile statt. Hieraus ist zu ersehen, dass nur die erste Zeile der Tabelle Transpositionen der Wurzeln x enthalten kann. Die einander ähnlichen Gruppen $\Gamma_{11}, \dots, \Gamma_{\mu\nu}$ müssen somit Transpositionen besitzen; sie sind primitiv, folglich sind sie auch symmetrisch: *demnach ist $g(x) = 0$ eine allgemeine Gleichung.*

Nach dieser Zurechtlegung der imprimitiven Gruppe G_1 kehren wir zu den obigen Untersuchungen zurück und ersehen jetzt ohne Schwierigkeit das Schlussresultat. G'_1 muss alle Transpositionen der ersten Zeile, d. h. die gesammte erste Zeile selbst umfassen; enthält G'_1 ferner eine Substitution irgend einer Zeile der Tabelle, so umschliesst G'_1 die ganze Zeile; G'_1 soll eine Untergruppe von G_1 sein und darf demnach nicht alle Zeilen der Tabelle enthalten. Das heisst:

Um sämtliche Gruppen G_1 aufzustellen, welche mit gewissen Untergruppen G' alle Transpositionen gemeinsam haben, bildet man eine Reihe von irreductiblen Gleichungen

$$\begin{aligned} g(x, x', x'', \dots, x^{(\nu)}; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) &= 0, & g'(x', x'', \dots, x^{(\nu)}; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) &= 0, \\ g''(x'', \dots, x^{(\nu)}; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) &= 0, \dots & g^{(\nu)}(x^{(\nu)}; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) &= 0, \end{aligned}$$

deren erste eine allgemeine Gleichung in x mit den willkürlichen Parametern $x', x'', \dots, x^{(\nu)}$ ist, eliminirt aus ihnen diese Parameter und bildet G_1 als Gruppe der resultirenden Gleichung; G'_1 erhält man, wenn man den Gleichungen $g' = 0, g'' = 0, \dots, g^{(\nu)} = 0$ beliebige Gattungen ihrer Wurzeln adjungirt.

Der § 73 meiner Substitutionentheorie zeigt, wie man auf rein substitutionentheoretischem Wege die fraglichen Gruppen construiren kann. Das einfachste Beispiel bietet sich bei den Gleichungen vierten Grades dar. Nimmt man g und g' vom zweiten Grade, so findet sich das Resultat: *Jede durch Quadratwurzeln lösbare Gleichung vierten Grades besitzt eine Gattung vierwertiger Functionen der Wurzeln, für welche keine Gattungsdiscriminante besteht.* Es ist dieser Ausspruch eine Übersetzung des Satzes, dass alle Transpositionen der Gruppe

$$G_1 = [1, (x_1 x_2), (x_3 x_4), (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3), (x_1 x_3 x_2 x_4), (x_1 x_4 x_2 x_3)]$$

auch in der Untergruppe

$$G'_1 = [1, (x_1 x_2), (x_3 x_4), (x_1 x_2)(x_3 x_4)]$$

auftreten. Weitere Beispiele lassen sich leicht bilden.

§ 6.

Alle die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen, welche sich auf Transpositionen bezogen und in ihren Resultaten Eigenschaften der Gattungsdiscriminanten nachwiesen, können ohne besondere Modificationen auf den Fall erweitert werden, dass wir Substitutionen von bestimmten anderen Typen betrachten. So sieht man z. B.: *Enthält G_1 überhaupt keine Substitutionen des Typus*

$$(x_1 x_2 x_3) \quad \text{oder} \quad (x_1 x_2)(x_3 x_4),$$

so besitzt keine Gattung G'_1 von Wurzeln einer zur Classe $(G_1; \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_n)$ gehörigen Gleichung Divisorensysteme zweiter Stufe, welche den Discriminanten $D_{y'_1}$ aller Functionen y'_1 der Gattung gemeinsam wären.

Kommen alle Substitutionen eines bestimmten Typus, welche in G_1 enthalten sind, auch in der Untergruppe G'_1 vor, so besitzen die Discriminanten von Functionen der Gattung G'_1 kein Divisorensystem gemeinsam, welches aus den Substitutionen jenes Typus entspringt.

Ein allgemeines hierher gehöriges Theorem leiten wir auf folgende Art ab: Wir verstehen unter γ eine zur GALOIS'schen Gattung gehörige Function bei einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades, so dass für γ die Maximalzahl von Werten $n! = N$ besteht. Auf die Reihe

$$(I') \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N$$

dieser Werte wird die Gruppe sämtlicher Substitutionen von x_1, x_2, \dots, x_n angewendet, und jede der hierdurch hervorgerufenen Gruppierungen der γ als eine Permutation der Elemente γ gegenüber der Anordnung (I') betrachtet. Die so entstehenden Substitutionen bilden eine Gruppe Σ der Ordnung $N = n!$, welche der Gruppe S aller Substitutionen unter den x einstufig isomorph ist. Jede Substitution von Σ setzt alle Elemente γ um; ferner ist eine jede regulär (Vgl. Substitutionentheorie § 89). Die Sub-

stitutionen, welche Divisorensysteme von möglichst niedriger Stufe hervorgerufen, haben demnach die Form $(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)\dots(\gamma_{n-1}\gamma_n)$ und die Divisorensysteme sind somit von der Stufe $\frac{1}{2}N = \frac{1}{2}n!$.

Es giebt Classen von Gleichungen der Grade $n!$, deren Gattungen als Divisorensysteme der Discriminanten nur solche der Stufe $\frac{1}{2}n!$ oder solche von höherer Stufe besitzen.

Als Beispiel wählen wir den Fall $n = 3$. Dann wird Σ die Substitutionen

$$1, (\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)(\gamma_5\gamma_6), (\gamma_1\gamma_4)(\gamma_2\gamma_5)(\gamma_3\gamma_6), (\gamma_1\gamma_6)(\gamma_2\gamma_3)(\gamma_4\gamma_5) \\ (\gamma_1\gamma_3\gamma_5)(\gamma_2\gamma_6\gamma_4), (\gamma_1\gamma_5\gamma_3)(\gamma_2\gamma_4\gamma_6)$$

enthalten; setzt man $\gamma = x_1x_2^2$ und nimmt man

$$x^3 + c_2x - c_3 = 0$$

als diejenige Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, so wird die Gleichung sechsten Grades für γ die folgende sein:

$$\gamma^6 + 3c_3\gamma^5 + (6c_3^2 + c_2^3)\gamma^4 + (7c_3^3 + 2c_2^3c_3)\gamma^3 + c_3^2(6c_3^2 + c_2^3)\gamma^2 + 3c_3^5\gamma + c_3^6 = 0.$$

Sie hat also die Eigenschaft, dass die Discriminante jeder beliebigen Function ihrer Wurzeln von Divisorensystemen erster und zweiter Stufe frei ist.

Die nachstehende zweite Methode führt zu ähnlichen Resultaten. Wir nehmen y_1 als eine beliebige Function ρ^{ter} Ordnung, welche zu der beliebigen Gruppe G_1 gehören möge. Die ρ Werte von y_1 sollen

$$(Y) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_\rho$$

sein. Wir setzen voraus, dass $\rho > 2$ angenommen werde. Auf die Reihe (Y) wenden wir alle Substitutionen der alternirenden Gruppe \mathfrak{A} von x_1, x_2, \dots, x_n an. Ist G_1 eine Untergruppe von \mathfrak{A} , so liefert die Anwendung von \mathfrak{A} auf y_1 nur die Hälfte aller Werte dieser Function

$$(Y') \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_{\frac{\rho}{2}};$$

ist G_1 dagegen nicht in der alternirenden Gruppe enthalten, so bekommen wir aus y_1 alle ρ Werte (Y). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle eintritt, erhalten wir durch die Anwendung von \mathfrak{A}

auf (Y') resp. (Y) eine transitive Gruppe A von $\frac{\rho}{2}$ oder von ρ Elementen. Es ist A von der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ und einstufig isomorph zu \mathfrak{A} ; denn zwei von einander verschiedene Substitutionen von \mathfrak{A} müssen verschiedene Substitutionen von A hervorrufen. Weil ferner \mathfrak{A} einfach ist, so kann auch A nicht zusammengesetzt sein. (Substitutionentheorie § 88.)

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, ob A primitiv oder imprimitiv ist. Im ersteren darf, falls ρ eine gewisse von p abhängige Grenze überschreitet, A keine cyklische Substitution einer Primzahlordnung enthalten, welche kleiner oder gleich p ist; denn sonst ginge (a. a. O. § 74 ff.) A in die alternirende oder die symmetrische Gruppe der $\frac{\rho}{2}$ resp. ρ Elemente y_1, y_2, \dots, y_ρ über, was wegen der bekannten Sätze über die Grösse von ρ in Beziehung auf n nicht möglich ist.

Hinsichtlich des Falles einer imprimitiven Gruppe A erinnern wir uns an einen Satz (a. a. O. § 84, Zusatz II), welcher in der correcten Fassung folgendermassen lautet: Jede imprimitive Gruppe ist zusammengesetzt, falls sie von der Einheit verschiedene Substitutionen besitzt, welche die einzelnen Systeme der Imprimitivität ungeändert lassen. Nun ist A einfach, und somit darf diese Gruppe keine Substitutionen enthalten, welche lediglich die Elemente der einzelnen Systeme unter einander umsetzen. Es dürfen demnach in A überhaupt keine cyklischen Substitutionen von Primzahlordnung vorkommen, weil diese gar nicht Elemente verschiedener Systeme enthalten können. Hieraus erhellt: *Die Classe der durch A charakterisirten Gleichungen des Grades $\frac{1}{2}\rho$ oder ρ und der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ enthält nur solche Gattungen von Wurzeln, deren Discriminanten keine Divisorensysteme besitzen, welche aus einer cyklischen Substitution der Primzahlordnung $q < p$ entspringen; p ist dabei eine von ρ abhängige Zahl, die mindestens den Wert 3 hat.*

Dass wir bei der Durchführung ähnlicher Untersuchungen zu ähnlichen Resultaten gelangen können, mag folgendes Beispiel zeigen.

Die Wurzeln von

$$x^4 - c_1 x^3 + c_2 x^2 - c_3 x + c_4 = 0$$

seien x_1, x_2, x_3, x_4 . Wir setzen

$$y_1 = x_1 x_2, y_2 = x_1 x_3, y_3 = x_1 x_4, y_4 = x_2 x_3, y_5 = x_2 x_4, y_6 = x_3 x_4$$

und wenden auf die x die symmetrische Gruppe dieser vier Elemente an. Dadurch werden 24 Substitutionen unter den y_1, y_2, \dots, y_6 hervorgerufen, welche eine zur symmetrischen Gruppe S von x_1, \dots, x_4 einstufig isomorphe Gruppe Σ bilden. Diese umfasst die folgenden Substitutionen

$$\begin{aligned} 1, & \quad (y_1 y_2)(y_5 y_6), (y_1 y_3)(y_4 y_6), (y_1 y_4)(y_3 y_6), (y_1 y_5)(y_3 y_6), \\ & \quad (y_1 y_6)(y_2 y_5), (y_1 y_6)(y_3 y_4), (y_2 y_3)(y_4 y_5), (y_2 y_4)(y_3 y_5), (y_2 y_5)(y_3 y_4), \\ & \quad (y_1 y_2 y_3)(y_4 y_5 y_6), (y_1 y_3 y_2)(y_4 y_5 y_6), (y_1 y_2 y_4)(y_3 y_5 y_6), (y_1 y_4 y_2)(y_3 y_5 y_6), \\ & \quad (y_1 y_3 y_5)(y_2 y_6 y_4), (y_1 y_5 y_3)(y_2 y_4 y_6), (y_1 y_4 y_5)(y_2 y_6 y_3), (y_1 y_5 y_4)(y_2 y_3 y_6), \\ & \quad (y_1 y_2 y_6 y_5)(y_3 y_4), (y_1 y_5 y_6 y_2)(y_3 y_4), (y_1 y_3 y_6 y_4)(y_2 y_5), \\ & \quad (y_1 y_4 y_6 y_3)(y_2 y_5), (y_2 y_3 y_5 y_4)(y_1 y_6), (y_1 y_4 y_6 y_3)(y_2 y_5). \end{aligned}$$

Die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln y_1, y_2, \dots, y_6 sind, lautet

$$\begin{aligned} y^6 - 3c_1 y^5 + (2c_2 + 3c_1^2) y^4 + (4c_1 c_2 + c_1^3) y^3 + (-4c_4 + c_3 c_1 + c_2^2 + 2c_2 c_1^2) y^2 \\ - (30c_5 + 4c_4 c_1 - c_3 c_1^2) y + (32c_6 - 7c_5 c_1 - c_3^2 - c_4 c_1^2 + c_3 c_2 c_1) = 0; \end{aligned}$$

die Gruppe derselben ist Σ . Aus der Beschaffenheit ihrer Substitutionen geht hervor, dass keine Gattung der Wurzeln y existirt, für welche die Discriminanten der zugehörigen Functionen einen Teiler oder auch ein Divisorensystem dritter oder fünfter Stufe gemeinsam hätten.

§ 7.

Für die nun folgenden allgemeineren Entwicklungen sind einige theils bekannte, theils leicht zu beweisende Hülfsätze nötig, welche hier zusammengestellt werden sollen:

I. Gehören zu einer Gruppe G alle Substitutionen eines bestimmten beliebigen Typus, so ist G entweder die alternirende oder die symmetrische Gruppe.

II. Jede Gruppe, welche nicht unter der alternirenden steht, ist zusammengesetzt; diejenigen ihrer Substitutionen, welche in der alternirenden Gruppe vorkommen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe mit 2 als Factor der Zusammensetzung.

III. Wendet man auf eine beliebige Function $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alle Substitutionen der x an, so entsteht unter den ρ Werten $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho$ eine transitive Gruppe.

IV. Entsprechende Substitutionen isomorpher Gruppen besitzen gleiche Ordnung.

V. Ist eine Gruppe einfach oder zusammengesetzt, so ist jede ihr isomorphe Gruppe gleichfalls entsprechend einfach oder zusammengesetzt.

VI. Jede isomorphe transitive Gruppe I' von G entspricht einer Untergruppe H von G derart, dass der Grad von I' gleich dem Quotienten aus den Ordnungen von G und H ist. Ist also z. B. G die alternirende Gruppe von x_1, x_2, \dots, x_n so ist I' von einem der Grade 1, n , $n(n-1), \dots$

Wir bezeichnen nun durch \mathfrak{A} und \mathfrak{S} die alternirende und die symmetrische Gruppe der n Elemente x_1, x_2, \dots, x_n . Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho$ die ρ Werte einer rationalen ganzen Function $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Wenden wir alle Substitutionen von \mathfrak{A} oder von \mathfrak{S} auf die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho$ an, dann kann man die hervorgerufenen Umstellungen als Substitutionen unter den φ deuten; die so entstehenden Gruppen seien entsprechend \mathcal{A} oder Σ ; Σ ist transitiv in den ρ Werten φ (Hülfss. III). Käme in Σ eine Transposition $\tau = (\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ vor und diese entspräche (Hülfss. IV) der Substitution zweiter Ordnung $t = (x_\alpha x_\beta)(x_\gamma x_\delta) \dots$ in \mathfrak{S} , dann würden allen Substitutionen t, t', t'', \dots in S , welche von demselben Typus sind wie t , in Σ Transpositionen $\tau, \tau', \tau'', \dots$ entsprechen, da die Operationen $s^{-1}ts$ und $\sigma^{-1}\tau\sigma$ einander entsprechen. Ebenso würden ferner die Gruppen $G = \{t, t', t'', \dots\}$ und $I' = \{\tau, \tau', \tau'', \dots\}$ einander isomorph sein. Gemäss Hülfss. I ist G alternirend oder symmetrisch, also I' entweder gleich \mathcal{A} oder gleich Σ ; da I' die Transposition $(\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ enthält, ist sie zusammengesetzt (Hülfss. II); demnach gilt dasselbe von G (Hülfss. V); also ist $G = S$ und $I' = \Sigma$. Sobald eine transitive Gruppe I' eine Transposition enthält, ist sie symmetrisch, und sonach von der Ordnung $\rho!$. Wir haben also $\rho! = n!$, da Σ, S einstufig isomorph sind; folglich ist $\rho = n$, d. h. *sobald $\rho > n$ wird, giebt es keine Substitution unter den x , welche $\rho - 2$ Werte der ρ -wertigen Function φ gleichzeitig ungeändert liessen.*

Es gilt ferner die bemerkenswerte Erweiterung dieses Satzes: *sobald $\rho > n$ ist, enthält Σ keine cyklischen Substitutionen, deren Ordnung eine Primzahl ist.* Dies beweisen wir folgendermassen: Wenn Σ eine Substitution τ der φ einer Primzahlordnung enthielte, und wenn unter t die entsprechende Sub-

stitution unter den x_1, x_2, \dots, x_n verstanden wird, dann muss t mindestens einen Cyklus besitzen, welcher dieselbe Ordnung hat, wie τ . Diese Ordnung sei q ; ferner sei $t = (x_1 x_2 \dots x_q)(x_{q+1} \dots) \dots$. In \mathfrak{S} giebt es die Substitution $t_1 = (x_1 x_3 x_2 \dots x_q)(x_{q+1} \dots) \dots$, welche aus t durch Transformation mit $(x_2 x_3)$ hervorgegangen ist. Ihr entspreche τ_1 in Σ . Da nun $t_1 \cdot t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ wird, so muss $\tau_1 \cdot \tau^{-1}$ eine Substitution dritter Ordnung sein, woraus folgt, dass τ, τ_1 gemeinsame Elemente haben, da sonst $\tau_1 \cdot \tau^{-1}$ von der Ordnung q bleiben würde. Transformirt man $t_1 t^{-1} = (x_1 x_2 x_3)$ durch t und seine Potenzen, so erkennt man, dass die erhaltenen Substitutionen eine transitive Gruppe entstehen lassen, welche $(x_1 x_2 x_3)$ umfasst und folglich die alternirende Gruppe \mathfrak{A}_1 der verbundenen q Elemente x_1, x_2, \dots, x_q wird. Die entsprechende Gruppe A_1 in Σ enthält höchstens $2q - 1$ Elemente. Sind die Elemente transitiv mit einander verbunden, dann folgt aus Hülfs. VI, dass es nur q sein können und daraus, dass auch die Gruppe A_1 alternirend in q Elementen φ ist und demnach ein $(\varphi_a \varphi_\beta \varphi_\gamma)$ enthält. Die transitive Gruppe Σ umfasst $(\varphi_a \varphi_\beta \varphi_\gamma)$, enthält also die alternirende Gruppe der ρ Elemente φ und da endlich Σ wie \mathfrak{S} zusammengesetzt dagegen A wie \mathfrak{A} einfach ist, so wird Σ symmetrisch, $\rho!$ wird $= n!$ und $\rho = n$. Intransitiv kann A_1 nicht sein, da jeder intransitive Teil mindestens q Elemente enthalten müsste.

Als Zusätze ergeben sich: Sobald $\rho > n$ ist, enthält Σ keine Substitution, welche potenzirt eine cyklische Substitution liefert, deren Ordnung gleich einer Primzahl wäre; ebensowenig eine Substitution von einem der Grade 5 oder 7.

Die Schlüsse, welche man aus diesen verschiedenen Sätzen auf die Divisorensysteme von Discriminanten machen kann, sind so ersichtlich, dass sie nicht aufgeführt zu werden brauchen. Nur der erste und einfachste sei hervorgehoben: Wendet man auf die ρ Werte $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho$ von $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alle Substitutionen der x an, so bestimmt die hierdurch gebildete zur symmetrischen Gruppe der x isomorfe Gruppe der φ eine Classe von Gleichungen ρ^{ten} Grades; für keine Gattung ihrer Wurzeln besitzt die zugehörige Discriminante Divisorensysteme erster oder zweiter Stufe.

Berlin d. 19 Januar 1883.

ACTA MATHEMATICA, 1. 1882/1883.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

	Seite. Page.
APPELL, P., Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) . 1. ...	109
— » » » » » » » 2. ...	132
— Développement en série dans une aire limitée par des arcs de cercle...	145
BOURGUET, L., Note sur les intégrales eulériennes	295
— Sur quelques intégrales définies	363
FUCHS, L., Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren	
Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen ...	321
GOURSAT, E., Sur un théorème de M. Hermite	189
GYLDÉN, H., Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper	77
HERMITE, CH., Sur une relation donnée par M. Cayley, dans la théorie des	
fonctions elliptiques	368
MALMSTEN, C. J., Zur Theorie der Leibrenten	63
NETTO, E., Zur Theorie der Discriminanten	371
PICARD, E., Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires	
et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables	
par ces substitutions	297
POINCARÉ, H., Théorie des groupes fuchsien ...	1
— Mémoire sur les fonctions fuchsiennes	193
REYE, TH., Das Problem der Configurationen	93
— Die Hexaëder- und die Octaëder-Configurationen $(12_6, 16_3)$	97
SCHERING, E., Zur Theorie der quadratischen Reste	153
ZEUTHEN, H. G., Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie	
énumérative	171

Das Bild von Abel

welches im ersten Bande der Acta Mathematica erscheint, ist ein im Atelier des Herrn J. Jæger in Stockholm gefertigter Lichtdruck und bildet die directe und genaue Copie einer im Jahre 1826 in Paris von dem norwegischen Künstler Görbitz angefertigten Tusch- und Federzeichnung. Das Original gehört Frau Thekla Lange, Tochter der Schwester Abels, Frau Elisabeth Böbert.

Der Redacteur.

Le portrait d'Abel

qui accompagne le premier volume des Acta Mathematica, est une héliotypie sortant des ateliers de M. J. Jæger à Stockholm. C'est la copie directe et fidèle d'un dessin fait à Paris en 1826 à la plume et à l'encre de Chine par l'artiste norvégien Görbitz. L'original appartient à M^{me} Thekla Lange, fille de la soeur d'Abel, M^{me} Elisabeth Böbert.

Le rédacteur.

I

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

1

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1882.

IMPRIMERIE CENTRALE.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND,	Lund.
H. TH. DAUG,	Upsala.
H. GYLDÉN,	Stockholm.
HJ. HOLMGREN,	»
C. J. MALMSTEN,	Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER,	Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES,	Christiania.
O. J. BROCH,	»
S. LIE,	»
L. SYLOW,	Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ,	Kjöbenhavn.
J. PETERSEN,	»
H. G. ZEUTHEN,	»

FINLAND:

L. LINDELÖF,	Helsingfors.
--------------	--------------

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

1:2

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1883.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.
34/35 FRANZÖSISCH STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS

A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND,	Lund.
H. TH. DAUG,	Upsala.
H. GYLDÉN,	Stockholm.
HJ. HOLMGREN,	»
C. J. MALMSTEN,	Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER,	Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES,	Christiania.
O. J. BROCH,	»
S. LIE,	»
L. SYLOW,	Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ,	Kjöbenhavn.
J. PETERSEN,	»
H. G. ZEUTHEN,	»

FINLAND:

L. LINDELÖF,	Helsingfors.
--------------	--------------

Tidsskrift for Mathematik,

der fra Begyndelsen af Aargangen 1883 redigeres af Dr. J. P. GRAM og Dr. H. G. ZEUTHEN, udgaar i Kjöbenhavn paa E. Jespersens Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Librairie Scientifique A. Hermann

8, Rue de la Sorbonne, Paris

Cours professé par M. Hermite

à la Faculté des Sciences de Paris, pendant le 2^e semestre 1881—82. Leçons recueillies par M. ANDOYER, élève de l'Ecole Normale supérieure. 2^e édition, revue et augmentée par l'auteur.

1 Vol. in 4^o, lithogr. 1883 12 Fr.

Inhalt. Table des matières.

	Seite, Page.
POINCARÉ, H., Théorie des groupes fuchsien	1
MALMSTEN, C. J., Zur Theorie der Leibrenten	63
GYLDÉN, H., Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper	77
REYE, TH., Das Problem der Configurationen	93
REYE, TH., Die Hexaëder- und die Octaëder-Configurationen (12 ₆ , 16 ₃)	97
APPELL, P., Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y)	109
APPELL, P., Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). (Second mémoire)	132
APPELL, P., Développement en série dans une aire limitée par des arcs de cercle	145
SCHERING, E., Zur Theorie der quadratischen Reste	153
ZEUTHEN, H. G., Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative	171
GOURSAT, E., Sur un théorème de M. Hermite	189



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

1:3

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1883.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.

5 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND,	Lund.
H. TH. DAUG,	Upsala.
H. GYLDÉN,	Stockholm.
HJ. HOLMGREN,	»
C. J. MALMSTEN,	Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER,	Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES,	Christiania.
O. J. BROCH,	»
S. LIE,	»
L. SYLOW,	Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ,	Kjöbenhavn.
J. PETERSEN,	»
H. G. ZEUTHEN,	»

FINLAND:

L. LINDELÖF,	Helsingfors.
--------------	--------------

Tidsskrift for Mathematik,

der fra Begyndelsen af Aargangen 1883 redigeres af Dr. J. P. GRAM og Dr. H. G. ZEUTHEN, udgaar i Kjöbenhavn paa E. Jespersens Forlag med et Hefte paa 1—3 Ark hveranden Maaned til en Pris af 6 Kroner for Aargangen, som altid bliver paa 12 Ark. Subskription modtages i alle Boglader i Danmark, Norge og Sverig.

Librairie Scientifique A. Hermann

8, Rue de la Sorbonne, Paris

Cours professé par M. Hermite

à la Faculté des Sciences de Paris, pendant le 2^e semestre 1881—82. Leçons recueillies par M. ANDOYER, élève de l'Ecole Normale supérieure. 2^e édition, revue et augmentée par l'auteur.

1 Vol. in 4^o, lithogr. 1883 12 Fr

Inhalt. Table des matières.

	Seite. Page.
POINCARÉ, H., Mémoire sur les Fonctions Fuchsiennes.....	193
BOURGUET, L., Note sur les intégrales eulériennes.....	295



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

1:4

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1888.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
H. TH. DAUG, Upsala.
H. GYLDÉN, Stockholm.
HJ. HOLMGREN, »
C. J. MALMSTEN, Upsala.
G. MITTAG-LEFFLER, Stockholm.

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
O. J. BROCH, »
S. LIE, »
L. SYLOW, Fredrikshald.

DANMARK:

L. LORENZ, Kjöbenhavn.
J. PETERSEN, »
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:



L. LINDELÖF, Helsingfors.

Mathematisches Vademecum der Literatur!

Durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes ist zu beziehen:

Wolf's naturwissenschaftlich-mathematisches Vademecum

Alphabetische Zusammenstellung der neueren und renommirteren Literatur-Erscheinungen des In- und Auslandes auf dem Gebiete der **Naturwissenschaften** und **Mathematik** (ca. 300 Seiten stark).

 **Neueste Auflage. Zehntes Tausend.** 

Preis 1 Mark baar.

Kössling'sche Buchhandlung (Gustav Wolf) in Leipzig.

Verlags- und Partie-Artikel von

MAYER & MÜLLER, Berlin.

CLEBSCH, ALFR., sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperellittiche, trad. ed annot. da F. Brioschi. 1877. 4°	M. 3 —
DIOPHANTUS von Alexandria. Arithmetische Aufgaben nebst dessen Schriften über die Polygon-Zahlen. Aus dem Griechischen mit Anmerkungen von O. Schulz. 1822	» 10 —
DIRKSEN, analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten. 1823. 4°	» 3 —
FROBENIUS, G., de functionum analyticarum unius variabilis per series infinitas representatione. 1870	» 1.50
HANKEL, H., die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments. 1863	» 2 —
— storia delle matematiche presso gli Arabi, trad. d. F. Keller. 1873. 4°	» 2 —
HINDENBURG, Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. 2 Theile. 1796—1800	» 4 —
MASCHERONI, L., Gebrauch des Zirkels, ins Deutsche übersetzt nebst Theorie vom Gebrauch des Proportionszirkels. Mit 18 Kupfer- tafeln. 1825	» 4 —
PRASSE, M. DE, institutiones analyticae. 1813. 4°	» 4 —
RIEMANN, B., Schwere, Electricität und Magnetismus, bearbeitet von Karl Hattendorff. 2 Aufl. 1880	» 6 —

Inhalt. Table des matières.

	Seite. Page.
PICARD, E., Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions	297
FUCHS, L., Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Inte- gralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen	321
BOURGUET, L., Sur quelques intégrales définies	363
HERMITE, CH., Sur une relation donnée par M. Cayley, dans la théorie des fonctions elliptiques.....	368
NETTO, E., Zur Theorie der Discriminanten	371

MAYER & MÜLLER, Antiquariat, Berlin W.

offeriren:

Annalen der Physik und Chemie , herausgegeben von Poggendorff und Neue Serie, herausgeg. von Wiedemann. Band 1 bis 171 nebst 8 Ergänzungsbänden, Jubelband und 4 Registern. Leipzig 1824 bis 1880. Vollständiges Exemplar.....	M. 2250.
BERTRAND, J., traité de calcul différentiel et intégral. 2 vol. Paris 1864—70. 4°	» 135.
CAUCHY, A. L., exercices de mathématiques. 5 Années en 51 livraisons. Paris 1826—30. 4°	» 200.
CHASLES, Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohncke. Halle 1839	» 28.
DUHAMEL, Lehrbuch der analytischen Mechanik, deutsch von Eggers mit Zusätzen von SCHLÖMILCH. 2 Bde. Leipzig 1853	» 22.
EUCLIDE, oeuvres avec la traduction latine et française par Peyrard. 3 vol. Paris 1814—18	» 60.
FAGNANO, G. C. di, produzioni matematiche. 2 Tomi. Pesaro 1750. 4°	» 140.
GAUSS, C. F., Werke, herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissen- schaften zu Göttingen. 6 Bände. Götting. 1863—74. 4°	» 96.

